

Démonstration 7 (solutions)

IFT2102

10 mars 2006

1

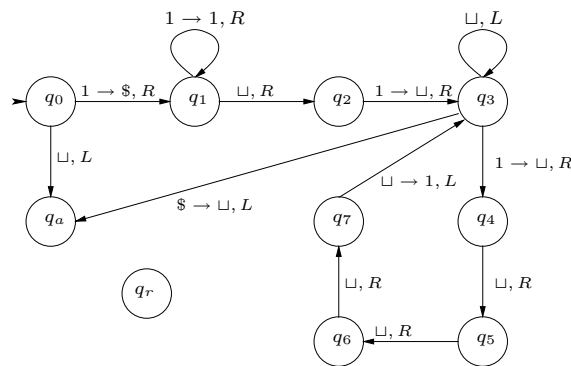
Donnez la description complète d'une MTD qui déplace son entrée de 5 cases vers la droite.

Pour simplifier le diagramme, on donne un algorithme pour un alphabet unaire.

Algorithme intuitif :

0. Si le ruban est vide, on accepte ;
1. On place un marqueur au début du mot et on décale le mot vers la droite (d'une case) ;
2. On déplace le dernier caractère à gauche de 4 cases vers la droite et on bouge la tête à gauche ;
3. On répète l'étape 2 jusqu'à ce que le caractère à gauche soit le \$;
4. On efface le \$ et on accepte. (ici, on aurait pu choisir de rejeter)

Plus rigoureusement, on considère la machine de Turing $MT_1 = (Q, \{1\}, \{1, \$, \sqcup\}, \delta, q_0, q_a, q_r)$ où : $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_a, q_r\}$ et, δ est donné par le diagramme suivant :



Il est à noter que le même algorithme fonctionne sur n'importe quel alphabet Σ mais le nombre d'états nécessaire grandit avec le nombre de caractères dans Σ .

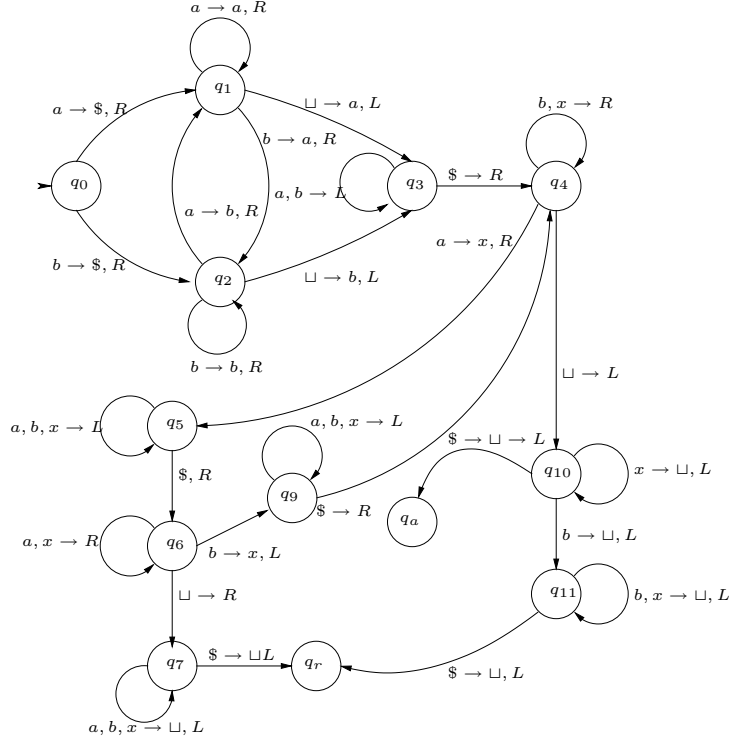
2

Une MTD qui décide $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid |w|_a = |w|_b\}$

Algorithme intuitif :

0. Si le ruban est vide, on accepte ;
1. On place un \$ au début du mot et on décale le mot vers la droite (d'une case) ;
2. On revient au premier espace et on se déplace la tête à droite d'une case ; (la tête est donc sur le premier caractère de w)
3. On cherche un a , si on le trouve, on le remplace par x , on revient au \$ et on va à l'étape 4, sinon on passe à l'étape 5 ;
4. On cherche un b , si on le trouve, on le remplace par x , on revient au \$ et on va à l'étape 3, sinon on passe à l'étape 6 ;
5. On vérifie qu'il n'y a plus de b , si c'est le cas, on efface le ruban et on accepte, sinon on efface le ruban et on rejette.
6. On efface le ruban et on rejette.

Plus rigoureusement, on considère la machine de Turing $MT_2 = (Q, \{a, b\}, \{a, b, \$, \sqcup\}, \delta, q_0, q_a, q_r)$ où : $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7, q_a, q_r\}$ et, δ est donné par le diagramme suivant :



3

Préliminaire :

Lorsque l'on ajoute un caractère α à la *fin* d'un nombre binaire ω , on se trouve à multiplier ω par 2 et à ensuite y ajouter α . On conclut que si $\omega = 3 * q + r$ alors

$$\omega\alpha = 2(3 * q + r) + \alpha = 6 * q + (2 * r + \alpha)$$

et donc le reste de la division de $\omega\alpha$ par 3 est $(2 * r + \alpha)$.

Algorithme :

0. On commence dans l'état $q_{r=0}$
1. **Si** on est dans $q_{r=0}$,
 - Si** on lit 0, on reste dans $q_{r=0}$ et on bouge la tête à droite
 - Si** on lit 1, on passe dans $q_{r=1}$ et on bouge la tête à droite
 - Si** on lit $\sqcup$, on efface le contenu du ruban, on écrit A sur la première case du ruban et on accepte.
- Si** on est dans $q_{r=1}$,
 - Si** on lit 0, on passe dans $q_{r=2}$ et on bouge la tête à droite

Si on lit 1, on passe dans $q_{r=0}$ et on bouge la tête à droite
Si on lit $\sqcup$, on efface le contenu du ruban, on écrit B sur la première case du ruban et on rejette.

Si on est dans $q_{r=2}$,

Si on lit 0, on passe dans $q_{r=1}$ et on bouge la tête à droite

Si on lit 1, on reste dans $q_{r=2}$ et on bouge la tête à droite

Si on lit $\sqcup$, on efface le contenu du ruban, on écrit B sur la première case du ruban et on rejette.

2. On recommence l'étape 1

Description complète :

Plus rigoureusement, on considère la machine de Turing

$$MT_1 = (Q, \{0, 1\}, \{0, 1, \sqcup\}, \delta, q_{r=0}, q_a, q_r)$$

où, $Q = \{q_{r=0}, q_{r=1}, q_{r=2}, q_3, q_4, q_a, q_r\}$ et, δ est donnée par le diagramme suivant :

