

Démonstration 6 (solution)

IFT2102

17 février 2006

1 Bonhomme Michelin à 5 pneus

Soit $\Sigma = \{0, 1, \#\}$ et

$L := \{x_1\#x_2\#\dots\#x_{2k} \mid k \geq 1, x_1 = 1, \forall i, x_{2i} \text{ commence par 1 et } x_{2i} = (1+x_{2i-1}) \text{ en binaire}\}.$

M.q. L n'est pas hors-contexte.

On observe que tout mot de L contient un nombre impair de $\#$.

Supposons que L est hors-contexte, soit p le nombre donné par le lemme du bonhomme Michelin à 5 pneus. Considérons le mot

$$w = 1\#10\#10^p10^p0\#10^p10^p1,$$

on a alors que $w \in L$ et $|w| \geq p$. D'après le lemme, il existe $u, v, x, y, z \in \Sigma^*$ tels que $w = uvxyz$ et

1. $|vy| > 0$,
2. $|vxy| \leq p$,
3. $uv^i xy^i z \in L, \forall i$.

Considérons toutes les décompositions possibles de w en u, v, x, y, z .

Cas 1 v ou y contiennent le troisième $\#$. Puisque $|vxy| \leq p$, on a $|vxy|_{\#} = 1$.

Ainsi, pour $i = 0$, $uv^i xy^i z = uxz$ et $|uxz|_{\#} = 2$, ce qui n'est pas impair et donc $uxz \notin L$.

Cas 2 v ou y contiennent le premier et deuxième $\#$. (Si v ou y ne contiennent qu'un des deux, nous aurions une contradiction comme dans le

premier cas.) Ainsi, pour $i = 0$, $uv^0xy^0z = uxz$ et $|uxz|_{\#} = 1$. Posons $uxz = y_1\#y_2$, alors, puisque $|vxy| \leq p$ on sait que y_1 est de la forme $ux0^{p-a}10^p0 \neq 1$. Ainsi, $uxz \notin L$.

Cas 3 v ou y couvrent en partie x_1 ou x_2 (mais ne contiennent pas de $\#$). Ainsi, pour $i = 0$, $uv^0xy^0z = uxz$ et

1. si soit v ou soit y couvrent en partie $x_1(= 1)$, alors uxz commence par $\#$,
2. sinon, v ou y couvrent en partie x_2 , alors uxz commence par $1\#1\#$ ou par $1\#0\#$.

Dans les deux cas, on a $uxz \notin L$.

Cas 4 v ou y sont tous les deux dans x_3 ou dans x_4 . Ainsi, pour $i = 0$, $uv^0xy^0z = uxz$. Posons $uxz = y_1\#y_2\#y_3\#y_4$, on a alors deux cas possible:

1. si v ou y sont tous les deux dans x_3 , alors $x_3 \neq y_3$ et $x_4 = y_4$ et donc $y_4 = x_4 = 1 + x_3 \neq y_3$ (en binaire),
2. si v ou y sont tous les deux dans x_4 , alors $x_3 = y_3$ et $x_4 \neq y_4$ et donc $y_4 \neq x_4 = 1 + x_3 = 1 + y_3$ (en binaire).

Dans les deux cas, on a $uxz \notin L$.

Cas 5 v est contenu dans x_3 et y est contenu dans x_4 . Ainsi, pour $i = 0$, $uv^0xy^0z = uxz$. Posons $uxz = y_1\#y_2\#y_3\#y_4$, on a alors deux cas possible:

1. si y contient le premier 1 de x_4 , alors $uxz = 1\#10\#10^p10^{p+1-a}\#0^{p-b+1}10^p1$ avec $a + b < p$. Ainsi, y_4 est plus petit que y_3 et n'est donc pas son successeur.
2. sinon, alors $uxz = 1\#10\#10^p10^{p+1-a}\#10^{p-b}10^p1$ avec $a + b > 0$ or il faut que $a = b = 0$ pour que $y_3 + 1 = y_4$.

Dans les deux cas, on a $uxz \notin L$.

Donc, dans tous les cas (on en a trouvé cinq), le mot $uxz \notin L$. Il nous faut donc rejeter l'hypothèse que le langage L soit hors-contexte.