

Vision par ordinateur: Calibration de Caméra et géométrie épipolaire

Sébastien Roy
Jean-Philippe Tardif

Département d'Informatique et de recherche opérationnelle
Université de Montréal



Hiver 2007



Au programme

- ① Introduction
- ② Calibration avec objet 3D
- ③ Calibration planaire
 - Formulation linéaire
 - Optimisation non-linéaire
- ④ Calibration par Rotation pure
- ⑤ Géométrie épipolaire
 - Matrice fondamentale
 - Matrice Essentielle
 - Retrouver les caméras



- 1 Introduction
- 2 Calibration avec objet 3D
- 3 Calibration planaire
 - Formulation linéaire
 - Optimisation non-linéaire
- 4 Calibration par Rotation pure
- 5 Géométrie épipolaire
 - Matrice fondamentale
 - Matrice Essentielle
 - Retrouver les caméras



Définition

Calibration

Retrouver les paramètres internes de la caméra. Parfois, ce terme inclus aussi les paramètres externes.

Calcul de pose

Calculer les paramètres externes. On suppose souvent que les paramètres internes sont connus.

Plus généralement

On cherche à associer à chaque pixel un rayon d'échantillonnage de l'espace

- point de départ
- direction

Ceci nous est donnée par les paramètres complets de la caméra



Type de calibration :

- Avec un objet 3D connu
- Avec d'images de plans connus (points, lignes, angle entre les lignes)
- À partir de mouvements de la caméra connus

Grandes étapes

- Identifier la projection des éléments (points, lignes, etc) dans les images
- Minimiser une fonction des paramètres et des entités



Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Calibration avec objet 3D
- 3 Calibration planaire
 - Formulation linéaire
 - Optimisation non-linéaire
- 4 Calibration par Rotation pure
- 5 Géométrie épipolaire
 - Matrice fondamentale
 - Matrice Essentielle
 - Retrouver les caméras

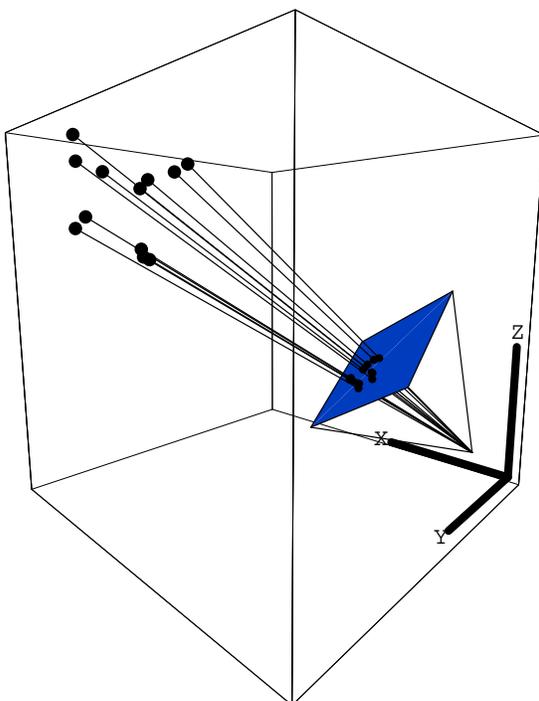


Objet connu

- Correspondances : points/lignes 3D \leftrightarrow leur image 2D
- Points 3D doivent être en position générale (non-planaire)

Exemple :

- Deux plans avec des damiers
- Dodécaèdre (nous en avons un au laboratoire)



- Points 3D connus
- Points images connus
- On cherche chaque rayon
- donc les paramètres de la caméra



Première étape

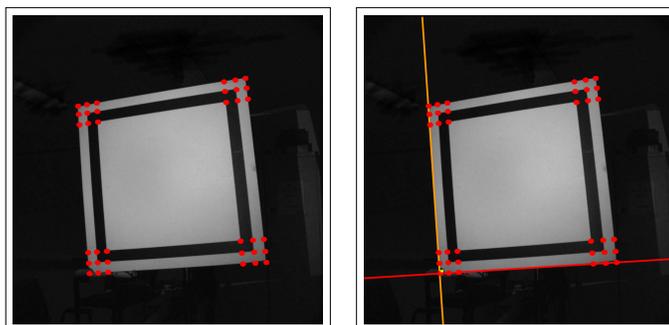
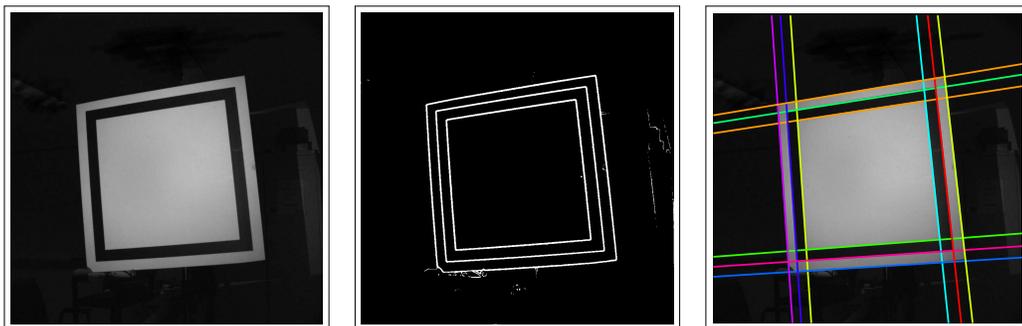
Avec une grille de calibration :

- Trouver des points saillants
- Trouver les bordures des carrés et trouver les lignes
- Intersection de ces lignes pour avoir des coordonnées sous-pixels
- Retrouver automatiquement la configuration des points (i.e. leur coordonnée)



Première étape : un exemple

- Processus idéalement automatique
- Très souvent semi-automatique (comme OpenCV)



Resectioning Deux relations utiles :

- Pour un point 3D :

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \times \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

avec une eq. redondante

- Pour une ligne 3D formée de deux points \mathbf{Q}_i, \mathbf{I} , sa projection dans l'image

$$(l_1 \quad l_2 \quad l_3) \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Q_{i1} \\ Q_{i2} \\ Q_{i3} \\ Q_{i4} \end{pmatrix} = 0$$

- Système d'équations en \mathbf{m} , le vecteur des m_{ij}
- Résolution avec la SVD, donc la contrainte $\|\mathbf{m}\| = 1$
- Minimisation de l'erreur algébrique



Décomposition de \mathcal{M}

Méthode indirecte :

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= [\mathcal{H} \quad \mathbf{m}_4] \\ &= \mathcal{H} [\mathbf{I} \quad \mathcal{H}^{-1}\mathbf{m}_4] \\ &= \mathcal{H} [\mathbf{I} \quad -\hat{\mathbf{C}}] \end{aligned}$$

- donc $\mathcal{H} = \mathcal{KR}$
- Décomposition RQ de \mathcal{H}



Méthode directe :

$$\rho \mathcal{H} = \rho \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^\top \\ \mathbf{h}_2^\top \\ \mathbf{h}_3^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \mathbf{r}_1^\top + s \mathbf{r}_2^\top + \mathbf{r}_3^\top u_0 \\ \beta \mathbf{r}_2^\top + \mathbf{r}_3^\top v_0 \\ \mathbf{r}_3^\top \end{bmatrix} = \mathcal{K} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^\top \\ \mathbf{r}_2^\top \\ \mathbf{r}_3^\top \end{bmatrix}$$

donc :

- $\rho = \pm 1 / \|\mathbf{h}_3\|$
- $\mathbf{r}_3 = \rho \mathbf{h}_3$
- $\rho \mathbf{h}_2^\top \rho \mathbf{h}_3 = v_0$
- ...

Voir Forsyth-Ponce pour le reste



Solution optimale

Minimisation de l'erreur de reprojection

$$\sum_i \text{dist}^2(\mathbf{p}_i, \mathcal{M} \mathbf{P}_i)$$

Si on a des contraintes sur \mathcal{K} :

$$\sum_i \text{dist}^2(\mathbf{p}_i, \mathcal{K} \mathcal{R} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{t} \end{bmatrix} \mathbf{P}_i)$$

- Paramétrisation de \mathcal{K} et \mathcal{R}
(Plus loin dans ce cours)



$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} - \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathbf{p} - \begin{bmatrix} \mathbf{m}_1^\top \\ \mathbf{m}_2^\top \end{bmatrix} \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

et le système est donc

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0}^\top & \mathbf{P}^\top \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{m}_1 \\ \mathbf{m}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{p}$$

- On résout avec la pseudo-inverse
- \mathcal{M} n'est pas définie à un facteur d'échelle
- Ceci minimise **l'erreur de reprojection**



Avantages/Inconvénients

- Simplicité
- Une seule vue, combiner plusieurs vues pour les paramètres internes ?
- Difficile d'avoir beaucoup de points
- Identifier les points automatiquement



- Forcer certaines contraintes
 - Point principal connu
 - Focal identique en X et Y (ratio d'image de 1)
 - Aucun skew
- Solution : formuler des système d'équations spécifiques, si possible

ex :

- Méthode Trucco & Verri, point principal connu
- Calibrage planaire
- Forcer les contraintes par après



Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Calibration avec objet 3D
- 3 Calibration planaire**
 - Formulation linéaire
 - Optimisation non-linéaire
- 4 Calibration par Rotation pure
- 5 Géométrie épipolaire
 - Matrice fondamentale
 - Matrice Essentielle
 - Retrouver les caméras



- Image d'un plan
- Géométrie euclidienne connue
- Paramètres internes calculés à partir de plusieurs vues
- Pose par rapport au plan pour chaque vue

Plan euclidien

On connaît un système d'axe euclidien dans ce plan. On connaît par exemple :

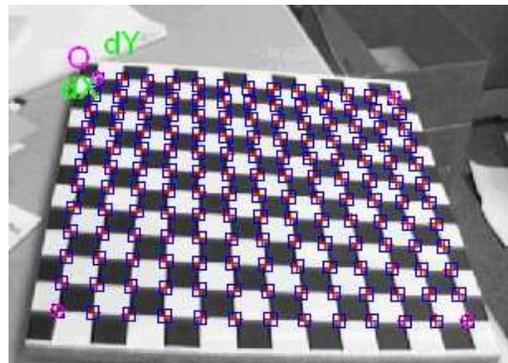
- l'angle entre les lignes
- la distance entre les points
- le fait que l'échiquier est constitué de "carrés"



Première étape

Avec une grille de calibration :

- Trouver des points saillants
- Retrouver automatiquement la configuration des points (i.e. leur coordonnée)
 - Pas si difficile



- 1 Introduction
- 2 Calibration avec objet 3D
- 3 Calibration planaire**
 - Formulation linéaire
 - Optimisation non-linéaire
- 4 Calibration par Rotation pure
- 5 Géométrie épipolaire
 - Matrice fondamentale
 - Matrice Essentielle
 - Retrouver les caméras

Modèle de projection → transformation

Rappel :

- Projection 3×4

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{M}\mathbf{P} = \mathcal{K}\mathcal{R}_{3 \times 3}[\mathbf{I}_{3 \times 3} | \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \\ 1 \end{pmatrix}$$

- Projection d'un plan en $Z = 0$

$$\mathcal{K}\mathcal{R}[\mathbf{I}_{3 \times 3} | \mathbf{t}] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{K}\mathcal{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \mathbf{t} \\ 0 & 1 & \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix} = \mathcal{H} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Définition

Conique de points complexes dans la plan infini $\pi_\infty = (0, 0, 0, 1)^\top$
Seulement pour les points de la forme $(x, y, z, 0)^\top$ et

$$(x, y, z) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0, \quad h = 0$$

(en euclidien)



Projection de Ω_∞

- Projection des points sur π_∞

$$\mathbf{p} = \mathcal{KR}[\mathbf{I}|\mathbf{t}] \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 0 \end{pmatrix} = \mathcal{KR} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- seuls l'orientation de la caméra et ses paramètres internes influencent la projection de ces points

Analogie : La position du soleil ou des étoiles ne changent pas si on translate, seulement si on change de d'orientation.



Projection de Ω_∞

Comme Ω_∞ est dans π_∞ on peut travailler avec les plans projectifs

- π_∞
- notre image de caméra

Rappel : transformation d'une conique :

$$C' \propto \mathcal{H}^{-\top} C \mathcal{H}^{-1}$$

- Posons $\mathcal{H} = \mathcal{K}\mathcal{R}$
- Appliquons à $\Omega_\infty = \mathbf{I}$

$$(\mathcal{K}\mathcal{R})^{-\top} \mathbf{I} (\mathcal{K}\mathcal{R})^{-1} = \mathcal{K}^{-\top} \mathcal{R} \mathbf{I} \mathcal{R}^{-1} \mathcal{K}^{-1} = \mathcal{K}^{-\top} \mathcal{K}^{-1}$$

Image de la Conique Absolue (*Image of the Absolute Conic (IAC)*)

$$\omega = \mathcal{K}^{-\top} \mathcal{K}^{-1}$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ ↻

Détails sur ω

Pour $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & u \\ 0 & f\alpha & v \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Au long,

$$\omega \propto \begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & -\alpha^2 u_0 \\ 0 & 1 & -v_0 \\ -\alpha^2 u_0 & -v_0 & f^2 \alpha^2 + u_0^2 \alpha^2 + v_0^2 \end{bmatrix}$$

Pour le moment, l'IAC est inconnue, nous allons l'estimer

$$\tilde{\omega} = \begin{bmatrix} w_1 & 0 & w_4 \\ 0 & w_2 & w_5 \\ w_4 & w_5 & w_3 \end{bmatrix}$$

On peut ajouter des contraintes ici. $\tilde{\omega}$ aura possiblement moins de variables. Par ex. $\alpha = 1$.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ ↻

Revenons à notre transformation \mathcal{H}

- On cherche $\tilde{\omega}$
- À partir d'une homographie \mathcal{H} entre le plan de calibration et l'image (on ne parle pas de π_∞)

On vérifie que pour $\mathcal{H} \propto \mathcal{KR} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{t} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$\mathbf{h}_1^\top \omega \mathbf{h}_2 = 0, \text{ et } \mathbf{h}_1^\top \omega \mathbf{h}_1 - \mathbf{h}_2^\top \omega \mathbf{h}_2 = 0$$

où \mathbf{h}_i est la $i^{\text{ème}}$ colonne de \mathcal{H} . Nous avons donc des contraintes linéaires :

$$\begin{bmatrix} h_1 h_2 & h_4 h_5 & h_7 h_8 & h_2 h_7 + h_1 h_8 & h_5 h_7 + h_4 h_8 \\ h_1^2 - h_2^2 & h_4^2 - h_5^2 & h_7^2 - h_8^2 & 2h_1 h_7 - 2h_2 h_8 & 2h_4 h_7 - 2h_5 h_8 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ w_4 \\ w_5 \end{pmatrix} = \mathbf{0}$$

Nous pouvons alors retrouver l'IAC et ensuite calculer les paramètres internes.



Décomposition de Ω

On peut maintenant retrouver les paramètres.

- Calcul direct
- Décomposition de Cholesky.

Exercice

- Combien faut-il d'homographie(s) pour calibrer complètement la caméra ?
- Si le ratio d'image est 1 et qu'on connaît le point principal, combien en faut-il ?



Calcul de pose

- \mathcal{K} connue

- Décomposer $\mathcal{N} \propto \mathcal{K}^{-1}\mathcal{H} = \mathcal{R} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \mathbf{t} \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$

Deux façons :

- Retrouver la translation avec

$$\mathcal{H}^T \omega \mathcal{H} \propto \begin{bmatrix} 1 & 0 & t_x \\ 0 & 1 & t_y \\ t_x & t_y & t_x^2 + t_y^2 + t_z^2 \end{bmatrix}$$

- $\mathcal{K}, \mathbf{t}, \mathcal{H}$ maintenant connus.
- Retrouver \mathcal{R}

- Retrouver \mathcal{R} avec

$$[\mathcal{N}^1 \quad \mathcal{N}^2 \quad \mathcal{N}^1 \times \mathcal{N}^2]$$

- forcer $|\mathcal{R}| = 1$,
- retrouver la translation



Calcul de pose

Exercice : Notez l'ambiguïté sur le signe t_z

- À quoi correspond chaque signe ?
- Si vous retrouvez deux positions de caméras ? Peut-on avoir deux signes différents ?
 - Si oui, pourquoi ?
 - Si non, comment corriger ça ?

- 1 Introduction
- 2 Calibration avec objet 3D
- 3 Calibration planaire
 - Formulation linéaire
 - Optimisation non-linéaire
- 4 Calibration par Rotation pure
- 5 Géométrie épipolaire
 - Matrice fondamentale
 - Matrice Essentielle
 - Retrouver les caméras

Optimisation non-linéaire

- Solution linéaire non optimale
- erreur algébrique vs erreurs de reprojection

- Minimiser l'erreur de reprojection
- ATTENTION, ce n'est PAS de l'ajustement de faisceau (plus tard dans la cours)

Pour toutes les vues i

$$\arg \min_{\mathcal{R}_i, \mathbf{t}_i, \mathcal{K}} \sum_{i,n} \text{dist}(\mathbf{p}_{in}, \mathcal{K} \mathcal{R}_i \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 & \mathbf{t}_i \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{P}_n)^2$$

- \mathbf{P}_n : les points dans le plan de calibration
- Plus difficile que pour les homographies
 - Contraintes sur \mathcal{R}



Problème de la rotation

Première solution : Paramétrisation

- Euler
- Rodrigues

- Fonctions compliquées
- Relativement difficile à optimiser
- lent

Mais ça fonctionne



Problème de la rotation

Deuxième solution : Optimisation itérative (recommandée)

- À chaque étape de l'algorithme d'optimisation (e.g. Levenberg-Marquardt)
- Rotation par rapport à l'étape précédente est **semblable**
- Simplification de la fonction à chaque itération.
- Nous avons :

$$\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R}'\mathcal{R}^n, \quad \text{ou} \quad \mathcal{R}' = \mathcal{R}_x(\theta)\mathcal{R}_y(\phi)\mathcal{R}_z(\rho)$$

- θ, ϕ, ρ sont **petits**
- Approximation de \mathcal{R}' :

$$\begin{aligned}\cos x &= 1 \\ \sin x &= x\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}' \approx \begin{bmatrix} 1 & \rho & -\phi \\ \theta\phi - \rho & \theta\rho\phi + 1 & \theta \\ \theta\rho + \phi & \rho\phi - \theta & 1 \end{bmatrix}$$

◁ □ ▷ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↻ ↺ ↻

Problème de la rotation

Approximer encore plus :

$$\begin{aligned}\theta\phi &\approx 0 \\ \theta\rho &\approx 0 \\ \phi\rho &\approx 0\end{aligned}$$

$$\mathcal{R}' \approx \begin{bmatrix} 1 & \rho & -\phi \\ -\rho & 1 & \theta \\ \phi & -\theta & 1 \end{bmatrix}$$

- matrice \mathcal{R}^n est fixe,
- à la fin de l'itération on met à jour :

$\mathcal{R}^{n+1} = \mathcal{R}'\mathcal{R}^n$ avec la formule de rotation originale (avec les cos et sin).

◁ □ ▷ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↻ ↺ ↻

Exercice (plutôt technique)

- Chercher un façon d'implémenter cela en **Mathematica**
Faire une version itérative de **FindMinimum**
En faisant des appels a FindMinimum
Comprendre pourquoi, dans Mathematica, cela n'est pas très efficace

Ceci est assez difficile si vous debutez avec Mathematica



Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Calibration avec objet 3D
- 3 Calibration planaire
 - Formulation linéaire
 - Optimisation non-linéaire
- 4 Calibration par Rotation pure
- 5 Géométrie épipolaire
 - Matrice fondamentale
 - Matrice Essentielle
 - Retrouver les caméras



Méthode par rotation pure

Définition

Caméra qui tourne parfaitement autour de son centre optique ($\mathbf{t} = \mathbf{0}$)

- Aucun effet de profondeur
- Images de caméra reliée par des homographies

Deux caméras avec

- $\mathcal{H}_1 = \mathcal{K}$ (sans rotation, ni translation)
- $\mathcal{H}_2 = \mathcal{K}\mathcal{R}$

Relier ensemble en faisant avec $\text{Image}_1 \rightarrow \text{Monde} \rightarrow \text{Image}_2$:

$$\mathcal{H}_{12} = \mathcal{K}\mathcal{R}\mathcal{K}^{-1}$$



Retrouver la rotation

Rotation conjuguée

Une matrice $\mathcal{H} = \mathcal{U}\mathcal{R}\mathcal{U}^{-1}$, où \mathcal{R} est une matrice orthogonale et \mathcal{U} est une transformation projective.

Pour une matrice de rotation \mathcal{R} , nous avons

- valeurs propres de la forme $\lambda(1, e^{i\theta}, e^{-i\theta})$,
(une réelle et deux complexes conjuguées)
- vecteurs propre correspondants ($\mathbf{a}, \mathbf{I}, \mathbf{J}$)

\mathbf{a} axe de rotation de la matrice

θ l'angle

Pour une rotation conjuguée, ces propriétés sont préservées.



Retrouver la calibration

Un cas simple :

ratio d'image à 1, point principal connu et mis à l'origine

Supposons $\mathcal{K} = \begin{bmatrix} f & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Dans ce cas $\mathcal{H} = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 & fr_3 \\ r_4 & r_5 & fr_6 \\ \frac{r_7}{f} & \frac{r_8}{f} & r_9 \end{bmatrix}$

- \mathcal{H} : presque une matrice de rotation
- solutions analytiques pour f

$$h_1^2 + h_2^2 + h_3^2/f^2 = h_4^2 + h_5^2 + h_6^2/f^2$$

ou bien

$$h_1h_4 + h_2h_5 + \frac{h_3h_6}{f^2} = 0$$



TP2

Vous avez tout ce qu'il faut pour faire le TP2!



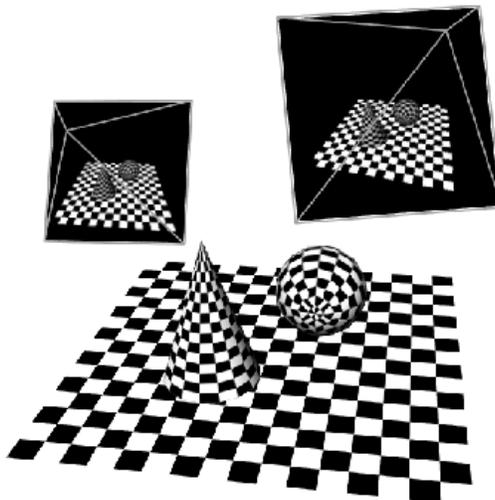
- 1 Introduction
- 2 Calibration avec objet 3D
- 3 Calibration planaire
 - Formulation linéaire
 - Optimisation non-linéaire
- 4 Calibration par Rotation pure
- 5 **Geométrie épipolaire**
 - Matrice fondamentale
 - Matrice Essentielle
 - Retrouver les caméras

Idée

Géométrie épipolaire

Relation des correspondances images de points 3D entre deux vues.

- points 3D inconnus



Problème

Calculer les paramètres d'une caméra en utilisant uniquement des points mis en correspondance entre deux images d'une même scène, prises sous des points de vue différents.

→ Exprime la relation entre les paramètres externes des deux caméras, pas entre les caméras et la scène.

2 cas : Paramètres internes

- inconnus (→ matrice **Fondamentale** \mathcal{F})
- connus (→ matrice **Essentielle** \mathcal{E})



Première étape

Entre deux vues :

- Établir des correspondances entre les images
- Deux solutions :
 - "Tracking" de points saillants au long d'une séquence
 - Mise en correspondances automatique des points descripteurs SIFT ou autre
voir aussi
<http://www.robots.ox.ac.uk/~vgg/research/affine/index.ht>



Matrice fondamentale

$$\mathbf{p}'^T \mathcal{F}_{3 \times 3} \mathbf{p} = 0$$

\mathbf{p}' et \mathbf{p} sont des points images

Matrice essentielle

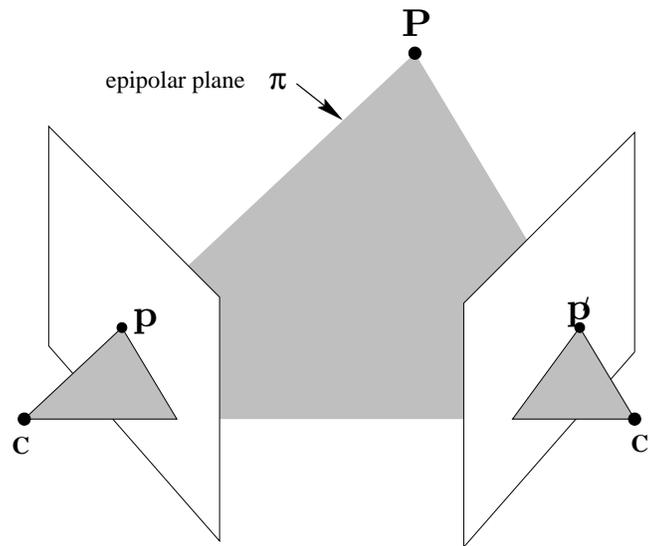
$$\hat{\mathbf{p}}'^T \mathcal{E}_{3 \times 3} \hat{\mathbf{p}} = 0$$

$\hat{\mathbf{p}}'$ et $\hat{\mathbf{p}}$ sont des points caméras :

$$\mathbf{p} = \mathcal{K} \hat{\mathbf{p}}$$

Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Calibration avec objet 3D
- 3 Calibration planaire
 - Formulation linéaire
 - Optimisation non-linéaire
- 4 Calibration par Rotation pure
- 5 Géométrie épipolaire**
 - Matrice fondamentale
 - Matrice Essentielle
 - Retrouver les caméras



- Deux caméras : \mathcal{M} (centre en C) et \mathcal{M}' , (centre en C')
- Un point 3D : P **inconnu**
- points image :
 - $p \propto \mathcal{M}P$
 - $p' \propto \mathcal{M}'P$



Pour la première caméra, déprojection de p

$$P(\lambda) = \mathcal{M}^\dagger p + \lambda C$$

Deux points sur cette ligne

- $\mathcal{M}^\dagger p$
- C ($\lambda = \infty$)

On projette dans l'image 2 et on joint les points

$$l' = (\mathcal{M}'C) \times (\mathcal{M}'\mathcal{M}^\dagger p)$$



Dérivation

Épipole

Projection du centre de la caméra dans la deuxième

$$\mathbf{e}' \propto \mathcal{M}'\mathbf{C}$$

$$\mathbf{l}' = \mathbf{e}' \times (\mathcal{M}'\mathcal{M}'^\dagger\mathbf{p}) = [\mathbf{e}']_{\times}\mathcal{M}'\mathcal{M}'^\dagger\mathbf{p}$$

Comme \mathbf{p}' est quelque part sur \mathbf{l}'

$$\mathbf{p}'^\top \mathbf{l}' = \mathbf{p}'^\top \underbrace{[\mathbf{e}']_{\times}\mathcal{M}'\mathcal{M}'^\dagger}_{\mathcal{F}}\mathbf{p} = 0$$

Matrice Fondamentale

$$\mathcal{F} = [\mathbf{e}']_{\times}\mathcal{M}'\mathcal{M}^\dagger$$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ↺ ↻

Propriétés

- 3×3
- Rang 2, car $[\mathbf{e}']_{\times}$ est rang 2
- 7 degrés de libertés (à un facteur d'échelle + rang 2)
- donc $\det(\mathcal{F}) = 0$

Points :

- vues 1 \leftrightarrow 2 $\mathbf{p}'^\top \mathcal{F}\mathbf{p} = 0$
- vues 2 \leftrightarrow 1 $\mathbf{p}^\top \mathcal{F}^\top \mathbf{p}' = 0$

Lignes épipolaires

- vues 1 \rightarrow 2 $\mathbf{l}' = \mathcal{F}\mathbf{p}$
- vues 2 \rightarrow 1 $\mathbf{l} = \mathcal{F}^\top \mathbf{p}'$

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ≡ ↺ ↻

Exemple

Deux caméras

- $\mathcal{M} = \mathcal{K} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$
- $\mathcal{M} = \mathcal{K}' \begin{bmatrix} \mathcal{R} & \mathbf{t} \end{bmatrix}$

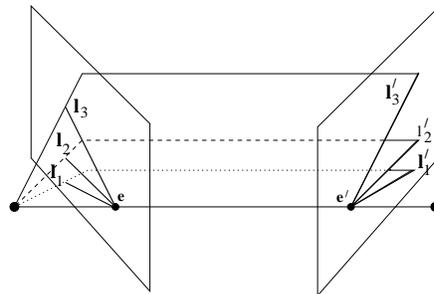
d'où

- $\mathcal{M}^\dagger = \begin{bmatrix} \mathcal{K}^{-1} \\ \mathbf{0}^\top \end{bmatrix}$
- $\mathbf{C} = (\mathbf{0}^\top \quad 1)^\top$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= [\mathcal{M}'\mathbf{C}]_\times \mathcal{M}'\mathcal{M}^\dagger \\ &= [\mathbf{t}]_\times \mathcal{K}'\mathcal{R}\mathcal{K}^{-1} \\ &= \mathcal{K}'^{-\top} [\mathbf{t}]_\times \mathcal{R}\mathcal{K}^{-1} \end{aligned}$$



Épipoles



Épipole

Intersection de toutes les lignes épipolaires

$$\mathbf{l}'_1 = \mathcal{F}\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{l}'_2 = \mathcal{F}\mathbf{p}_2$$

et

$$\mathbf{e}'^\top \mathbf{l}'_1 = \mathbf{e}'^\top \mathbf{l}'_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{e}'^\top \mathcal{F} = 0$$

- \mathbf{e}' est le noyau **gauche** de \mathcal{F}
- \mathbf{e} est le noyau **droit** de \mathcal{F}



Algorithme des 8 points

- Algorithme simple et populaire.
- Formulation linéaire
- Contrainte de rang forcée indirectement

Soit N points (avec $N \geq 8$) mis en correspondance

On a l'équation

$$\mathbf{p}^T \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_3 \\ f_4 & f_5 & f_6 \\ f_7 & f_8 & f_9 \end{bmatrix} \mathbf{q} = 0$$

- Une correspondance \rightarrow une contrainte

$$\mathbf{A} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_9 \end{pmatrix} = 0$$

avec

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} p_1q_1 & p_1q_2 & p_1q_3 & p_2q_1 & p_2q_2 & p_2q_3 & p_3q_1 & p_3q_2 & p_3q_3 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix}$$

Système linéaire homogène... \rightarrow SVD.

Il faut absolument **NORMALISER** les points

Estimation

Forcer la contrainte de rang 2 :

Nous avons \mathcal{F} :

- trouvée avec l'algorithme des 8 points
- Rang 3

On cherche \mathcal{F}' :

- Rang 2
- minimise $\|\mathcal{F} - \mathcal{F}'\|$

$$\mathcal{F} = \mathcal{U} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \mathcal{V}^\top$$

$$\mathcal{F}' = \mathcal{U} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, 0) \mathcal{V}^\top$$

Effectuer cela avant la dénormalisation de \mathcal{F}'



Estimation

Formulation linéaire algébrique :

$$\sum_i (\mathbf{p}_i^\top \mathcal{F} \mathbf{p}'_i)^2$$

Error géométrique optimale :

$$\sum_i \text{dist}^2(\mathbf{p}_i, \mathcal{F} \mathbf{p}'_i) + \text{dist}^2(\mathbf{p}'_i, \mathcal{F}^\top \mathbf{p}_i)$$

Minimiser la distance des points à la ligne épipolaire



$$\sum_i \text{dist}^2(\mathbf{p}_i, \mathcal{F}\mathbf{p}'_i) + \text{dist}^2(\mathbf{p}'_i, \mathcal{F}^\top \mathbf{p}_i)$$

Minimiser la distance des points à la ligne épipolaire

- paramétrisation pour \mathcal{F} ,
- pour forcer les **contraintes**

ex :

- sur-paramétrisation :

$$\mathcal{F} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathcal{M}$$

- dernière colonne comme combinaison linéaire des deux premières :

$$\mathcal{F} = \begin{bmatrix} a & b & \alpha a + \beta b \\ c & d & \alpha c + \beta d \\ e & f & \alpha e + \beta f \end{bmatrix}$$

- Singularité si F_1 et F_2 sont linéairement dépendante



Sommaire

- 1 Introduction
- 2 Calibration avec objet 3D
- 3 Calibration planaire
 - Formulation linéaire
 - Optimisation non-linéaire
- 4 Calibration par Rotation pure
- 5 **Geométrie épipolaire**
 - Matrice fondamentale
 - **Matrice Essentielle**
 - Retrouver les caméras

$$\hat{\mathbf{p}}' \mathcal{E}_{3 \times 3} \hat{\mathbf{p}} = 0$$

$\hat{\mathbf{p}}'$ et $\hat{\mathbf{p}}$ sont des points caméras :

$$\mathbf{p} = \mathcal{K} \hat{\mathbf{p}}$$

$$\mathcal{F} = \mathcal{K}'^{-\top} \underbrace{[\mathbf{t}]_{\times} \mathcal{R}}_{\mathcal{E}} \mathcal{K}^{-1}$$

On enlève les matrices de paramètres internes

$$\mathcal{E} = \mathcal{K}'^{\top} \mathcal{F} \mathcal{K} = [\mathbf{t}]_{\times} \mathcal{R} = \mathcal{R} [\mathcal{R}^{\top} \mathbf{t}]_{\times}$$



Propriétés

- 5 degrés de liberté
 - + 3 pour \mathcal{R}
 - + 3 pour \mathbf{t}
 - 1 pour facteur d'échelle
- 2 valeur singulières égales
 - Famille de décomposition

Paramétrisation SVD de \mathcal{E} :

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \text{diag}(1, 1, 0) \mathcal{V}^{\top}$$

n'est pas unique

$$\mathcal{E} = (\mathcal{U} \text{diag}(\mathcal{R}_{2 \times 2}, 1)) \text{diag}(1, 1, 0) \text{diag}(\mathcal{R}_{2 \times 2}^{\top}, 1) \mathcal{V}^{\top} \quad \forall \mathcal{R}$$

donc

- +3 pour \mathcal{U}
- +3 pour \mathcal{V}
- -1 pour \mathcal{R}



- 1 Introduction
- 2 Calibration avec objet 3D
- 3 Calibration planaire
 - Formulation linéaire
 - Optimisation non-linéaire
- 4 Calibration par Rotation pure
- 5 **Geométrie épipolaire**
 - Matrice fondamentale
 - Matrice Essentielle
 - Retrouver les caméras



À partir \mathcal{F}

On ne peut retrouver que des caméras perspective
(non-euclidienne)

On peut choisir

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \\ \mathcal{M}' &= [[\mathbf{e}']_{\times} \mathcal{F} \quad \mathbf{e}']\end{aligned}$$

(\mathcal{M}' est rang 2, qu'est-ce que ça implique?)

Mais de façon générale :

$$\begin{aligned}\mathcal{M} &= [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}] \\ \mathcal{M}' &= [[\mathbf{e}']_{\times} \mathcal{F} + \mathbf{e}' \mathbf{v}^T \quad \lambda \mathbf{e}']\end{aligned}$$

pour tout \mathbf{v} et pour λ non-nul



Plus tard dans le cours

\mathcal{M} et \mathcal{M}' sont connus à une transformation projective $\mathcal{H}_{4 \times 4}$

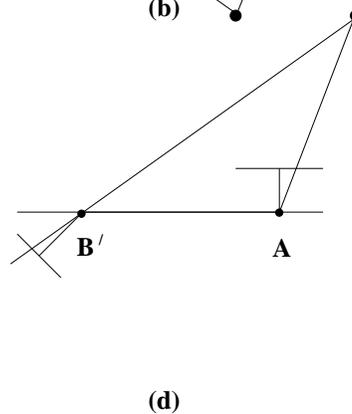
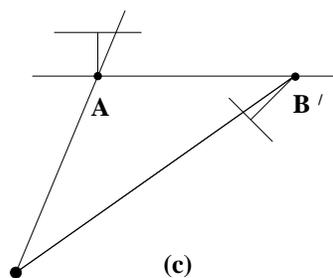
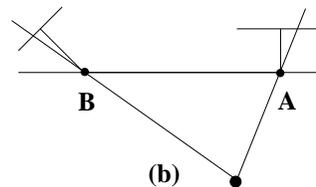
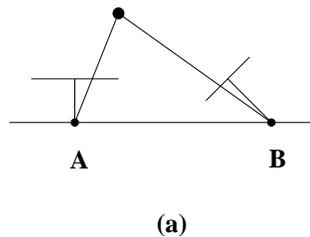
- Passage de projectif à euclidien
- Auto-calibrage



Pose à partir de \mathcal{E}

Rappel : \mathcal{K} et \mathcal{K}' sont connus

- 4 solutions possibles :



- 1 seule valide



Pose à partir de \mathcal{E}

$$\mathcal{E} = \mathcal{U} \text{diag}(1, 1, 0) \mathcal{V}^T$$

Première caméra : $\mathcal{M} = [\mathbf{I} \quad \mathbf{0}]$

Deuxième caméra :

$$\mathcal{M}' = [\mathcal{U} \mathcal{W} \mathcal{V}^T \mid + \mathbf{u}_3]$$

$$\mathcal{M}' = [\mathcal{U} \mathcal{W} \mathcal{V}^T \mid - \mathbf{u}_3]$$

$$\mathcal{M}' = [\mathcal{U} \mathcal{W}^T \mathcal{V}^T \mid + \mathbf{u}_3]$$

$$\mathcal{M}' = [\mathcal{U} \mathcal{W}^T \mathcal{V}^T \mid - \mathbf{u}_3]$$

avec $\mathcal{W} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, \mathbf{u}_3 la dernière colonne de \mathcal{U}



Pose à partir de \mathcal{E}

Il faut choisir \mathcal{M}' :

- points devant les deux caméras
- formule de la profondeur des points doit être positive



FIN

Certaines figures sont la courtoisie de
R. Hartley et A. Zisserman
Multiple View Geometry in Computer Vision, 1ère Édition, 2002