

Vision par ordinateur: Géométrie Projective

Sébastien Roy
Jean-Philippe Tardif

Département d'Informatique et de recherche opérationnelle
Université de Montréal



Hiver 2007



Au programme

- 1 Géométrie projective : Introduction
- 2 Géométrie projective 2D
 - Éléments
 - Transformations
- 3 Géométrie projective 3D
 - Éléments
 - Transformations



Sommaire

- 1 Géométrie projective : Introduction
- 2 Géométrie projective 2D
 - Éléments
 - Transformations
- 3 Géométrie projective 3D
 - Éléments
 - Transformations



Définition

Géométrie projective

Branche des mathématiques qui étudie les entités géométrique, leur propriétés et invariances après projection.

Éléments de base :

- Point
- Ligne
- Plan
- Conique
- Quadrique

Exemple d'invariance :

- une ligne reste droite



- 1 Géométrie projective : Introduction
- 2 **Géométrie projective 2D**
 - Éléments
 - Transformations
- 3 Géométrie projective 3D
 - Éléments
 - Transformations

- 1 Géométrie projective : Introduction
- 2 **Géométrie projective 2D**
 - **Éléments**
 - Transformations
- 3 Géométrie projective 3D
 - Éléments
 - Transformations

Notation

- Vecteurs :
 - Point 2D : \mathbf{p}, \mathbf{q}
 - Point 3D : \mathbf{P}, \mathbf{Q}
 - Ligne 2D : l
 - Plan 3D : π
- Matrices
 - Transformation, Projection : \mathcal{M}, \mathcal{A}
 - Conique, Quadrique, Plücker : $\mathcal{C}, \mathcal{Q}, \mathcal{L}$
- Symboles
 - \equiv : le même élément
 - \propto : proportionnel, identique à une facteur d'échelle
 - $\mathcal{A}^{-T} = (\mathcal{A}^{-1})^T = (\mathcal{A}^T)^{-1}$
 - \mathcal{M}^* est l'adjointe de \mathcal{M}

Point (représentation homogène)

Le point \mathbf{P} euclidien est associé au point \mathbf{P}' dans l'espace projectif :

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P} \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{P}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}' \in \mathbb{P}^3$$

Par définition on a l'équivalence

$$\mathbf{P}' \equiv h\mathbf{P}' \quad (h \neq 0)$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} hx \\ hy \\ hz \\ h \end{pmatrix}$$

et le dernier élément de \mathbf{P}' est la coordonnée homogène

$$\text{euclidien} \rightarrow \text{projectif} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} hx \\ hy \\ hz \\ h \end{pmatrix} \quad (h \neq 0)$$

$$\text{projectif} \rightarrow \text{euclidien} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x/h \\ y/h \\ z/h \end{pmatrix}$$

Espace projectif à deux dimensions :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x/h \\ y/h \end{pmatrix}$$

Espace projectif à trois dimensions :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ h \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} x/h \\ y/h \\ z/h \end{pmatrix}$$

(...)

Addition projective

Addition de deux points projectifs :

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ h_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2x_1 + h_1x_2 \\ h_2y_1 + h_1y_2 \\ h_1h_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ h \end{pmatrix}$$

Équivalent euclidien

$$\begin{pmatrix} x_1/h_1 \\ y_1/h_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2/h_2 \\ y_2/h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{h_2x_1 + h_1x_2}{h_1h_2} \\ \frac{h_2y_1 + h_1y_2}{h_1h_2} \end{pmatrix}$$

Comparer des points dans \mathbb{P}^n

- Transformer dans \mathbb{R}^n

Mais, quoi faire quand $h = 0$?

- Normaliser

Seul cas spécial : $(0 \ 0 \ \dots)^T$

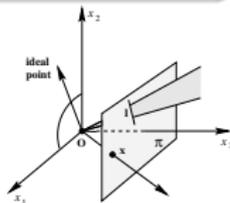
- Produit vectoriel

 $\mathbf{p} \times \mathbf{q} = \mathbf{0}$

Fonctionne toujours mais plus coûteux

Vous pouvez visualiser \mathbb{P}^2 avec \mathbb{R}^3

- Seule la direction est importante
- Le plan $Z = 0$ est la plan infini
- \mathbb{R}^2 est le plan $Z = 1$



Encore mieux

\mathbb{P}^2 est la surface d'une sphère

- En supposant qu'on garde les points normalisés



En forme implicite, l'équation d'une ligne est :

$$ax + by + c = a(hx) + b(hy) + ch = 0$$

où

- $\mathbf{l} = (a \ b \ c)^T$ est une ligne
- $\mathbf{p} = (hx \ hy \ h)^T$ est un point sur la ligne

On peut donc réécrire sous la forme :

$$\mathbf{l}^T \mathbf{p} = \mathbf{p}^T \mathbf{l} = 0$$

\mathbf{p} et \mathbf{l} , sont des **3-vecteurs** tous les deux.



Dualité

Dualité (non-formelle)

Lorsqu'un énoncé, obtenu à partir d'un premier énoncé (théorème) dans lequel les concepts sont substitués par leur dual, est, lui-aussi, vrai.

Dualité en géométrie projective 2D

À chaque théorème de géométrie projective 2D, correspond un théorème dual, construit à partir de l'original, en inter-changeant le rôle des points et des lignes.

Généralisation : point/plan et même point/hyper-plan



Dualité projective 2D : point-ligne

Exemple :

L'ensemble des points \mathbf{p} sur la ligne \mathbf{l} sont donnés par

$$\mathbf{l}^T \mathbf{p} = 0.$$

et

L'ensemble des lignes passant par le point \mathbf{p} sont donnés par

$$\mathbf{p}^T \mathbf{l} = 0.$$

On peut interchanger points et lignes dans le premier énoncé pour obtenir le deuxième et ils sont tous deux vrais.



2 points \rightarrow ligne, 2 lignes \rightarrow point

Pour deux lignes l et l' , on cherche un point p tel que

$$l^T p = l'^T p = 0$$

Grâce à l'identité du produit scalaire triple :

$$l \cdot (l \times l') = l' \cdot (l \times l')$$

On obtient directement que :

Le point d'intersection de l avec l' , est donné par :

$$p \equiv l \times l' \equiv l' \times l$$

Grâce au principe de **dualité**, on obtient aussi directement que :

La ligne joignant deux points p et p' , est donné par :

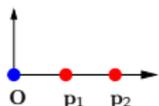
$$l \equiv p \times p' \equiv p' \times p$$

Point à l'infini

Point idéal

Un point de la forme $(x \ y \ 0)^T$.

- Ne peut-être représenté dans \mathbb{R}^2
- $(x \ y)$ donne la direction



$$O = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0.5 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Point à l'infini

Exemple : deux lignes parallèles

$$l_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, l_1 \times l_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Toutes les lignes passent par l'infini

Ligne à l'infini

l_∞

Elle est constituée des points à l'infini : de la forme $(a \ b \ 0)^T$, d'où

$$l_\infty \propto (0 \ 0 \ c)^T$$

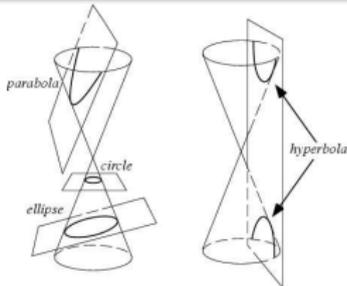
- $\mathbb{P}^2 = \mathbb{R}^2 \cup l_\infty$

Exemple, ligne joignant deux points à l'infini :

$$p_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, p_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, p_1 \times p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Conique ou Courbe quadratique

L'image de l'intersection d'un plan avec un cône droit, situé dans le système de coordonnées du plan



- L'orientation du plan par rapport au cône → différentes formes de courbe



Conique de points

La forme générale d'une conique C est donnée par l'équation implicite :

$$ax^2 + dx + bxy + cy^2 + ey + f = 0$$

$\mathbf{p} \equiv (x \ y \ 1)^T$ un point sur la conique

$\{a, b, c, d, e, f\}$ sont les paramètres

On peut réécrire le tout sous forme :

$$C \propto \begin{bmatrix} a & \frac{b}{2} & \frac{d}{2} \\ \frac{b}{2} & c & \frac{e}{2} \\ \frac{d}{2} & \frac{e}{2} & f \end{bmatrix} \text{ avec } \mathbf{p}^T C \mathbf{p} = 0, \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$$

C Matrice (3×3), symétrique, rang 3, définie à un facteur d'échelle

Trouver la sorte de courbe à partir de C ?

Voir <http://mathworld.wolfram.com/QuadraticCurve.html>

Conique Duale : conique de lignes

Encore une fois, grâce à la dualité :

Une ligne \mathbf{l} est tangente à une conique C si

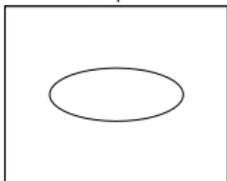
$$\mathbf{l}^T C^* \mathbf{l} = 0$$

où C^* est l'adjointe de C

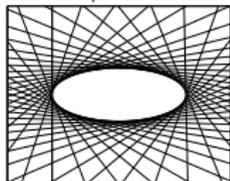
- Pour une matrice symétrique inversible : $C^* = C^{-1}$

Exemple :

Ellipse



Ellipse Duale



Conique Duale : conique de lignes

Pourquoi le résultat $(\mathbf{l}^T C^* \mathbf{l} = 0)$ est valide ?

Autre résultat

Une ligne \mathbf{l} tangente C au point \mathbf{p} est donnée par

$$\mathbf{l} = C\mathbf{p}$$

et donc

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^T C \mathbf{p} &= (C^{-1})^T C (C^{-1}) \\ &= \mathbf{l}^T C^{-1} \mathbf{l} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Les coniques duales seront utiles pour la **calibration** et l'**auto-calibration** de caméras.



Lorsque le plan coupant le cône passe par son centre : C singulière (non-inversible)

Résultat :

- Un point
- Une ligne
- Deux lignes qui s'intersectent

Essayez-le dans Mathematica !

◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

Exemple : Construire une conique dégénérée à partir de 2 lignes

$$l_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, l_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, C = l_1 l_2^T + l_2 l_1^T = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 \\ 3 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

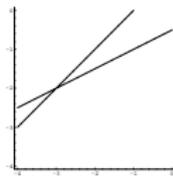
- C est dégénérée : $\text{Rang}(C) = 2$
- Vérifions :

$$\begin{pmatrix} x & y & 1 \end{pmatrix} C \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-2(-1+x-2y)(1+x-y) = 0$$

$$x = -1 + y, \quad x = 1 + 2y$$

On retrouve nos lignes.
Pourquoi ?



◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

Coniques complexes

Conique constitué de points complexes

Exemples :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 0$$

Dégénérée :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow x^2 + y^2 = 0$$

◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

Conique : petits exercices

Certains algorithmes de vision nécessitent l'analyse de coniques dans les images.

Pour une conique C , trouver formule/algorithmes pour :

- le centre
- les axes
- les points focaux
- vérifier si deux coniques sont identiques, modulo :
 - rotation/translation
 - changement d'échelle

◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

1 Géométrie projective : Introduction

2 Géométrie projective 2D

- Éléments
- Transformations

3 Géométrie projective 3D

- Éléments
- Transformations

En euclidien, une transformation **Affine** est donnée par :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \mathbf{q} + \begin{pmatrix} t_x \\ t_y \end{pmatrix} \quad \text{où } \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^2$$

On peut la réécrire pour des points projectifs :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad \text{où } \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$$

→ 6 degrés de liberté

- C'est la transformation linéaire la plus générale de \mathbb{R}^2

Autres transformations

Similarité :

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} s\mathcal{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \quad \text{où } \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$$

→ 4 degrés de liberté

Euclidienne

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathcal{R} & \mathbf{t} \\ \mathbf{0}^T & 1 \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad \text{où } \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$$

→ 3 degrés de liberté

$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$ est une matrice de rotation 2D, i.e.

$$\mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathbf{I}, \quad \det(\mathcal{R}) = 1$$

Transformation projective

En projectif, il y a une transformation linéaire encore plus générale :

Transformation Projective

Il s'agit d'une transformation linéaire entre deux plans projectifs π_1 et π_2

$$\mathbf{p} = \mathcal{H}\mathbf{q} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \mathbf{q} \quad \text{où } \mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{P}^2$$

- \mathcal{H} est couramment appelé **Homographie**
- \mathbf{p}, \mathbf{q} sont respectivement sur π_1 et π_2

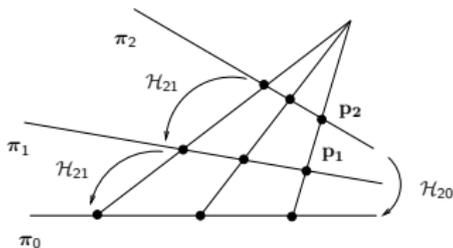
On dit alors que \mathcal{H} fait un transfert de π_2 vers π_1

→ 8 degrés de liberté

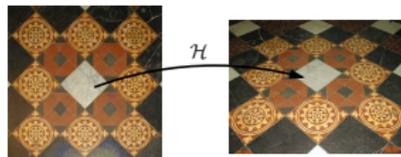
- À un facteur d'échelle
- Inversible
- Englobe toute les autres transformations

- Pour deux relations $\mathcal{H}_{01} : \pi_0 \rightarrow \pi_1$ et $\mathcal{H}_{12} : \pi_1 \rightarrow \pi_2$, on peut construire $\mathcal{H}_{02} \propto \mathcal{H}_{01}\mathcal{H}_{12} : \pi_0 \rightarrow \pi_2$

Exemple d'illustration 1D



Exemple :



- Le premier plan est Euclidien
- Il a subi une transformation projective pour donner le deuxième

Transformation projective appliquée aux lignes

Supposons une ligne $\mathbf{v} \propto \mathbf{p} \times \mathbf{q}$, la transformation projective \mathcal{H} s'applique sur \mathbf{v} selon :

$$\mathbf{u} \propto \mathcal{H}^{-T} \mathbf{v}$$

Pourquoi ?

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &\propto (\mathcal{H}\mathbf{p}) \times (\mathcal{H}\mathbf{q}) \\ &\propto \mathcal{H}^{-T}(\mathbf{p} \times \mathbf{q}) \\ &\propto \mathcal{H}^{-T}(\mathbf{q} \times \mathbf{p}) \\ &\propto \mathcal{H}^{-T} \mathbf{v} \end{aligned}$$

\mathcal{H}^{-T} veut dire inverse/transpose ou transpose/inverse de \mathcal{H} , puisque l'ordre n'est pas important

Transformation projective appliquée aux coniques

- Conique originale $\mathbf{p}^T \mathbf{C} \mathbf{p} = 0$
- Transformons $\mathbf{p}' = \mathcal{H}\mathbf{p}$
- Nous cherchons \mathbf{C}' t.q. $\mathbf{p}'^T \mathbf{C}' \mathbf{p}' = 0$

$$\begin{aligned} (\mathcal{H}^{-1}\mathbf{p}')^T \mathbf{C} \mathcal{H}^{-1}\mathbf{p}' &= 0 \\ (\mathcal{H}^{-1}\mathbf{p}')^T \mathbf{C} \mathcal{H}^{-1}\mathbf{p}' &= 0 \\ \mathbf{p}'^T \mathcal{H}^{-T} \mathbf{C} \mathcal{H}^{-1}\mathbf{p}' &= 0 \\ \mathbf{p}'^T \mathbf{C}' \mathbf{p}' &= 0 \end{aligned}$$

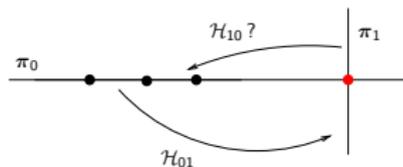
Donc :

$$\mathbf{C}' \propto \mathcal{H}^{-T} \mathbf{C} \mathcal{H}^{-1}$$

Peut-on trouver une transformation projective pour transformer une ellipse en

- parabole ?
- hyperbole ?
- en 2 lignes ?
- un point ?
- n'importe quel point ?

Exemple 1D :



Exercice

- Imaginez les situations dégénérées en 2D
- Pour chacune d'elles, que se passe-t-il avec \mathcal{H}_{01}
- Quelles sont les conséquences sur \mathcal{H}_{10} ?

Ligne à l'infini et invariance affine

Pour une transformation affine, un point à l'infini et l_∞ reste à l'infini.

- Pour le **point** :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & t_y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{1T} \\ A^{2T} \\ A^{3T} \end{bmatrix}, \text{ et donc } A^{3T} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \end{bmatrix} = 0$$

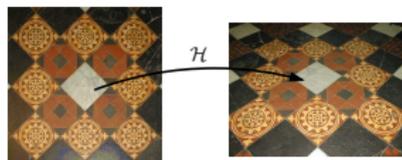
- Pour la **ligne** :

$$\mathcal{A}^{-T} = \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 \\ t'_x & t'_y & 1 \end{bmatrix}, \text{ et donc } \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 \end{bmatrix} \mathbf{1}_\infty = \mathbf{0}_{2 \times 1}$$

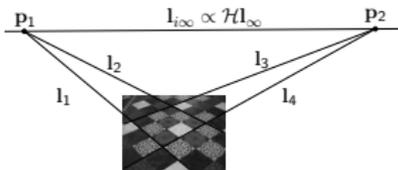
Ligne à l'infini et non-invariance projective

Observer que l'infini (un point à l' ∞ ou l_∞) n'est pas invariant à une transformation projective !

Exemple :



Exemple (suite) :

Dans le plan **euclidien** (image précédente)

- l_1 et l_2 sont parallèles, se coupent à l'infini
- l_3 et l_4 aussi

Dans ce plan **projectif** :

- ATTENTION : $l_{i\infty}$ n'est pas l_{∞} , c'est son **image** !
- p_1 et p_2 passent maintenant par l_0

**Définition**Appliquer une transformation à l'image pour ramener la ligne $l_{i\infty}$ à l_{∞} .

- Supposons $l_{i\infty} = (l_1 \ l_2 \ l_3)^T$

- On cherche \mathcal{H} t.q. $\mathcal{H}^{-T}l_{i\infty} \propto (0 \ 0 \ 1)^T$

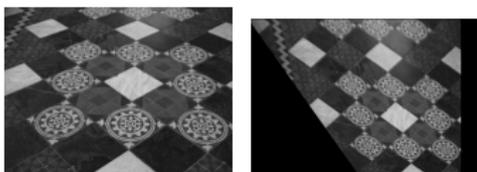
$$\mathcal{H}^{-T} \propto \begin{bmatrix} l_3 & 0 & -l_1 \\ 0 & l_3 & -l_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ d'où } \mathcal{H} \propto \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ l_1 & l_2 & l_3 \end{bmatrix}$$



Rectification affine

Cette transformation n'est pas unique !

- Suivie d'une transformation affine
- $\mathcal{H}' = \mathcal{A}\mathcal{H}$



À droite :

- Les lignes qui devraient être parallèles le sont !
- Mais les angles ne sont pas rectifiés

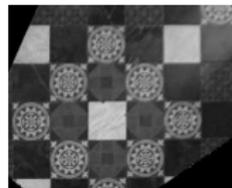


Rectification affine

- l_{∞} est fixe sous transformation affine
- Trouver son image permet de rectifier l'image
- Mais seulement à une transformation affine près

Peut-on faire plus ? Oui !

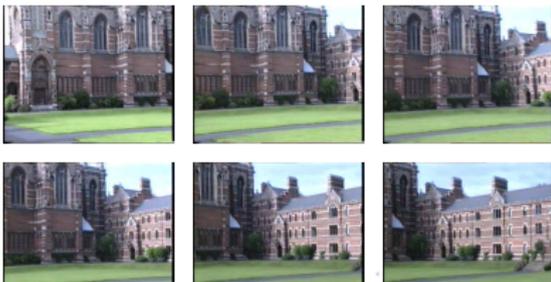
- Rectification euclidienne
- Il faut trouver l'image de la conique duale aux points circulaires
(La conique quoi ?!)
 - Pas dans le cours



Une application des homographies (TP1 !)

Construction de mosaïque

- Combiner plusieurs images pour obtenir une image panoramique
- Caméra en rotation pure



Sommaire

- 1 Géométrie projective : Introduction
- 2 Géométrie projective 2D
 - Éléments
 - Transformations
- 3 **Géométrie projective 3D**
 - Éléments
 - Transformations



Petit algorithme simple

- Choisir une vue de référence
- Calculer les homographies entre celle-ci et les autres images
- Reprojeter ces images dans la vue de référence

Sommaire

- 1 Géométrie projective : Introduction
- 2 Géométrie projective 2D
 - Éléments
 - Transformations
- 3 **Géométrie projective 3D**
 - Éléments
 - Transformations

En forme implicite, l'équation d'un plan est :

$$ax + by + cz + d = a(hx) + b(hy) + c(hz) + hd = 0$$

où

- $\pi = (a \ b \ c \ d)^T$ est un plan 3D
- $\mathbf{n} = (a \ b \ c)^T$ est la normale du plan
- $\mathbf{P} = (hx \ hy \ hz \ h)^T$ est un point sur le plan

On peut donc réécrire sous la forme :

$$\pi^T \mathbf{P} = \mathbf{P}^T \pi = 0$$

\mathbf{P} et π , sont des **4-vecteurs** tous les deux

Dualité dans \mathbb{P}^3

Point vs Plan



Exemple :

L'ensemble des points \mathbf{P} sur le plan π sont donnés par

$$\pi^T \mathbf{P} = 0.$$

et

L'ensemble des plans passant par le point \mathbf{P} sont donnés par

$$\mathbf{P}^T \pi = 0.$$



Dualité projective 3D : point-plan

Trois points donnent un plan :

$$\mathcal{P}_{3 \times 4} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^T \\ \mathbf{P}_2^T \\ \mathbf{P}_3^T \end{bmatrix} \pi = \mathbf{0}$$

- Le rang de \mathcal{P} est au plus 3
- π est donc le noyau droit de \mathcal{P}

Pour calculer π :

$$\det \begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$aX + bY + cZ + dH = 0, \quad \text{avec } \mathbf{P} = (X \ Y \ Z \ H)^T$$

- a,b,c,d sont donnés par des déterminants de sous-matrices de $\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 & \mathbf{P}_2 & \mathbf{P}_3 \end{bmatrix}$
- Donc $\pi = (a \ b \ c \ d)^T$



Dualité projective 3D : point-plan

Trois plans s'intersectent en un point :

$$\begin{bmatrix} \pi_1^T \\ \pi_2^T \\ \pi_3^T \end{bmatrix} \mathbf{P} = \mathbf{0}$$

Trouver le point est exactement comme précédemment.



$$\pi_{\infty} = (0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$$

- Ne contient que des points à l'infini ($h = 0$)
- Là où les lignes/plans parallèles se coupent
- Similaire à \mathbf{I}_{∞} de \mathbb{P}^2 , mais pour \mathbb{P}^3
- 3 degrés de liberté
- Permet une rectification affine en 3D
Reconstruction projective \rightarrow affine (plus tard dans le cours)

Représenter une ligne n'est pas si évident.

Forme paramétrique

Construite à partir de deux points :

$$\lambda \mathbf{P}_1 + (1 - \lambda) \mathbf{P}_2$$

Noyau (*Nullspace*) et étendu (*Span*)

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^T \\ \mathbf{P}_2^T \end{bmatrix}$$

Forme Implicite

Matrices de Plücker

Noyaux et Étendu

À partir de points

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1^T \\ \mathbf{P}_2^T \end{bmatrix}$$

- Noyaux de \mathcal{L} : l'ensemble des plans passant par \mathbf{P}_1 et \mathbf{P}_2 .
- Étendu de \mathcal{L} : $\lambda \mathbf{P}_1 + \mu \mathbf{P}_2$

Dual (avec des plans)

$$\mathcal{L}^* = \begin{bmatrix} \pi_1^T \\ \pi_2^T \end{bmatrix}$$

Une ligne + un point $\mathbf{P}_3 \rightarrow$ plan

$$\text{Noyau de } \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \mathbf{P}_3^T \end{bmatrix}$$

Une ligne + un plan $\pi_3 \rightarrow$ point

$$\text{Noyau de } \begin{bmatrix} \mathcal{L} \\ \pi_3^T \end{bmatrix}$$

Matrice de Plücker

Ligne de \mathbb{P}^3 représentée grâce à une matrice $\mathcal{L}_{4 \times 4}$: ligne joignant deux points 3D

- Nos deux points $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$

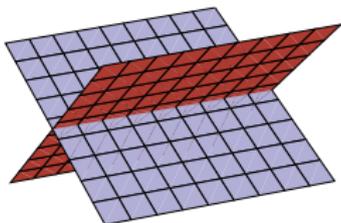
On construit :

$$\mathcal{L} \propto \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2^T - \mathbf{P}_2 \mathbf{P}_1^T$$

- Un plan π passant par $\mathbf{P}_1 \rightarrow \mathbf{P}_1^T \pi = 0$
- Un plan π passant par $\mathbf{P}_2 \rightarrow \mathbf{P}_2^T \pi = 0$
 $\mathcal{L} \pi = 0$

- Pour π' t.q. $\mathcal{L} \pi' = \mathbf{P} \neq 0$
 \mathbf{P} est le point créé par l'intersection de \mathcal{L} avec π'

Illustration



Ligne de \mathbb{P}^3 représentée grâce à une matrice $\mathcal{L}_{4 \times 4}$: l'intersection de deux plans

- Nos deux points π_1, π_2

On construit :

$$\mathcal{L}' \propto \pi_1 \pi_2^T - \pi_2 \pi_1^T$$

- Un point P passant par $\pi_1 \rightarrow \pi_1^T P = 0$
- Un point P passant par $\pi_2 \rightarrow \pi_2^T P = 0$
 $\mathcal{L}P = 0$
- Pour P' t.q. $\mathcal{L}P' = \pi \neq 0$
 π est le plan créé en joignant \mathcal{L} avec P'

◀ ▶ ↻ 🔍

◀ ▶ ↻ 🔍

Matrice des cofacteurs

Matrice des cofacteurs

Matrice composée de ses cofacteurs élément par élément.

\mathcal{A}_{ij} est le déterminant de \mathcal{A} après avoir enlevé la rangée i et la colonne j , multiplié par $(-1)^{i+j}$

$$\text{Cof} \mathcal{A} = [A_{ij}], \quad i : \text{indice de rangées}, j : \text{indice de colonnes}$$

Exemple :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 9 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 8 \end{bmatrix}, \quad \text{Cof} \mathcal{A} = \begin{bmatrix} 28 & 3 & -26 \\ -28 & 37 & 6 \\ 0 & -25 & 30 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{M}_{11} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \mathcal{M}_{12} = - \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \mathcal{M}_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{M}_{21} = - \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}, \mathcal{M}_{22} = \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \mathcal{M}_{23} = - \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 7 & 4 \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{M}_{31} = \begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}, \mathcal{M}_{32} = - \begin{vmatrix} 9 & 5 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}, \mathcal{M}_{33} = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

◀ ▶ ↻ 🔍

Mathematica à votre service pour vos diapos

Matrices de la Diapo précédente

```
<< DiscreteMath`Combinatorica`
m = {{9, 6, 5}, {4, 6, 5}, {7, 4, 8}}
```

```
Unprotect[Det];
Clear[Det];
Det[x_] := ToString[TeXForm[x]];
```

```
Table[{Subscript[m, j, i], Cofactor[m, {j, i}], {j, 1, 3}, {i, 1, 3}} //
  Flatten[#, 1] &;
{TeXForm[#[[1]]], "=", #[[2]]} & /@ %;
Map[ToString, %, {2}];
StringJoin /@ %;
StringReplace[#, {"(" -> "|"} & /@ %;
StringReplace[#, ")" -> "|"} & /@ %;
StringReplace[#, "M" -> "\m M"] & /@ %;
StringReplace[#, "," -> "" ] & /@ %
```

◀ ▶ ↻ 🔍

Matrice adjointe

Matrice des cofacteurs, transposée

$$A^* = \text{Cof}A^T = [A_{ji}]$$

- Il y a une formule de passage $\mathcal{L} \leftrightarrow \mathcal{L}^*$
- Sans utiliser la matrice des cofacteurs
- Je vous laisse la trouver

◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

Les 6 éléments non-nuls de la matrice de Plücker

- Nous ne les verrons pas en détails dans ce cours
- Certains avantages par rapport aux matrices
- Passage matrice \leftrightarrow vecteur est simple

◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

Quadrique ou Surface Quadratique

- Extension des coniques au monde 3D
- $Q_{4 \times 4}$, à un facteur d'échelle
- 17 quadriques différentes !

Non-dégénérée : $\text{rang}(Q) = 4$

Ellipsoïde (sphère)	Paraboloïde	Hyperboloïde
		

- Dégénérée : $\text{rang}(Q) < 4$
 - Plans
 - Cône
 - Cylindre
 - ...

Voir <http://mathworld.wolfram.com/QuadraticSurface.html>

◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

Sommaire

- 1 Géométrie projective : Introduction
- 2 Géométrie projective 2D
 - Éléments
 - Transformations
- 3 Géométrie projective 3D
 - Éléments
 - Transformations

◀ ▶ ↺ ↻ 🔍

Projective (homographie 3D)

$$\begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} \\ h_{41} & h_{42} & h_{43} & h_{44} \end{bmatrix}$$

Affine

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & t_x \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & t_y \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Similarité

$$\begin{bmatrix} sr_{11} & sr_{12} & sr_{13} & t_x \\ sr_{21} & sr_{22} & sr_{23} & t_y \\ sr_{31} & sr_{32} & sr_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Euclidienne

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & t_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & t_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & t_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Définition

En euclidien

$$\mathcal{R} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

$$\bullet \mathcal{R}^T \mathcal{R} = \mathcal{R} \mathcal{R}^T = \mathbf{I}$$

- ★ si $\det(\mathcal{R}) = 1$, c'est une rotation propre
- si $\det(\mathcal{R}) = -1$, elle est impropre (rotoinversion)
- 3 degrés de liberté

Paramétrisation de matrice de rotation

Paramétrisation de matrice de rotation

Paramétrisation de Euler

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}(\phi)\mathcal{R}(\theta)\mathcal{R}(\rho)$$

$$\mathcal{R}(\phi) = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) & 0 \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{R}(\rho) = \begin{bmatrix} \cos(\rho) & \sin(\rho) & 0 \\ -\sin(\rho) & \cos(\rho) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Paramétrisation de Rodrigues

- Rotation autour de θ degrés autour d'un axe \mathbf{n}

$$\mathcal{R} = \mathbf{I}_{3 \times 3} \cos \theta + \mathbf{n} \mathbf{n}^T (1 - \cos \theta) + [\mathbf{n}]_{\times} \sin \theta$$

$$[[n_1, n_2, n_3]^T]_{\times} = \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix}$$

- Paramétrisation redondante
 - $\|\mathbf{n}\| = 1$
ou
 - remplacer $\theta = \|\mathbf{n}\|$

Transformation des éléments

Pour $\mathcal{H}_{4 \times 4}$

- Point
 $\mathcal{H}\mathbf{P}$
- Plan
 $\mathcal{H}^{-T}\boldsymbol{\pi}$
- Matrice de Plücker
 $\mathcal{H}\mathcal{L}\mathcal{H}^T$
- Quadrique
 $\mathcal{H}^{-T}\mathcal{Q}\mathcal{H}$

Exercice

Essayer de bien comprendre d'où elles proviennent à partir de leur définition



Projection

Voici les deux projections qui nous intéressent le plus :

Matrice de projection perspective : $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^2$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} & m_{34} \end{bmatrix}$$

Projection sur un plan **projectif**

Matrice de projection Affine : $\mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & m_{14} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} & m_{24} \end{bmatrix}$$

Projection sur un plan **euclydien**

Elles nous seront utiles pour représenter les différents types de **caméras**.



Projection des éléments

Pour une matrice de projection $\mathcal{M}_{3 \times 4}$

- Point
 $\mathbf{p} = \mathcal{M}\mathbf{P}$
- Plan (points tous sur un même plan)
Ramener les coordonnées du plan t.q. $Z = 0$

$$\mathbf{p} = \mathcal{M}\mathbf{P} = [\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2 \quad \mathbf{M}_3 \quad \mathbf{M}_4] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = [\mathbf{M}_1 \quad \mathbf{M}_2 \quad \mathbf{M}_4] \begin{pmatrix} X \\ Y \\ 1 \end{pmatrix}$$

Il existe donc $\mathcal{H}_{3 \times 3}$

- Matrice de Plücker et Duale \rightarrow ligne \mathbb{P}^2
 $[\mathbf{l}]_x = \mathcal{M}\mathcal{L}\mathcal{M}^T$
- Quadrique duale \rightarrow Conique duale
 $\mathcal{C}^* \propto \mathcal{M}\mathcal{Q}^*\mathcal{M}^T$



Matrice symétrique gauche

Matrice symétrique gauche (*skew-symmetric*)

$$[\mathbf{a}]_x = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = [\mathbf{a}]_x \mathbf{b}$$



- Notions de bases d'algorithmes numériques
- Décomposition de matrice
- Ajustement (fit)

FIN

Certaines figures sont la courtoisie de
R. Hartley et A. Zisserman
Multiple View Geometry in Computer Vision, 1ère Édition, 2002