

IFT-1575
Devoir 1 – Corrigé

Date de remise : 28 janvier 2010.

Le devoir est individuel. Le règlement sur le plagiat sera d'application.

On considère l'exemple GAMS de la Section 1.4.1 des notes de cours.

1. Ecrivez le programme linéaire, sous forme standard.

Dénotons par x_1 la bière légère et x_2 la bière noire. Nous voulons maximiser le profit en respectant les ressources disponibles, ce qui se traduit par

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c. } 2x_1 + 3x_2 &\leq 75; \\ 3x_1 + x_2 &\leq 60; \\ 2x_1 + \frac{5}{3}x_2 &\leq 50; \\ x_1, x_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

2. Résolvez le problème à l'aide de GAMS.

Extrait du fichier produit par GAMS :

	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
---- VAR pi	-INF	43.322	+INF	.
pi profit (maximand)				
---- VAR x production level				
	LOWER	LEVEL	UPPER	MARGINAL
light	.	16.678	+INF	.
dark	.	9.967	+INF	.

Autrement, la valeur optimale est 43.322 et la solution optimale, (16.678, 9.967).

3. Réalisez une itération du simplexe à la main sur ce problème.

En partant du programme standard, nous devons tout d'abord transformer le problème en introduisant des variables d'écart. Nous obtenons ainsi le

problème

$$\begin{aligned} \max z &= 2x_1 + x_2 \\ \text{s.c. } 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 75; \\ 3x_1 + x_2 + x_4 &= 60; \\ 2x_1 + \frac{5}{3}x_2 + x_5 &= 50; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 &\geq 0. \end{aligned}$$

Les variables de base sont, pour la première étape de l'algorithme, x_3 , x_4 , et x_5 . Par conséquent, les variables hors-base sont x_1 et x_2 , que nous posons égales à 0. Nous obtenons ainsi la solution de base réalisable $(0, 0, 75, 60, 50)$.

En regardant la fonction objectif, nous observons que les coûts réduits associés à x_1 et x_2 sont positifs, et que le coût associé à x_1 est le plus élevé. En conséquence, nous choisissons x_1 comme variable entrant dans la base. Les trois égalités donne, en maintenant x_2 à 0,

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 75; \\ 3x_1 + x_4 &= 60; \\ 2x_1 + x_5 &= 50, \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} x_3 &= 75 - 2x_1; \\ x_4 &= 60 - 3x_1; \\ x_5 &= 50 - 2x_1. \end{aligned}$$

Or, x_3 , x_4 et x_5 doivent être positifs, aussi, nous avons

$$\begin{aligned} x_1 &\geq 75/2; \\ x_1 &\geq 20; \\ x_1 &\geq 25. \end{aligned}$$

Le deuxième contrainte implique les deux autres, aussi nous la sélectionnant pour déterminer la variable sortant de la base, en l'occurrence x_4 . En réécrivant le système linéaire en fonction des variables hors-base, nous avons

$$\begin{aligned} x_3 &= 75 - 2x_1 - 3x_2; \\ 3x_1 &= 60 - x_2 - x_4; \\ x_5 &= 50 - 2x_1 - \frac{5}{3}x_2, \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}x_3 &= 75 - 2 \left(20 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \right) - 3x_2; \\x_1 &= 20 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4; \\x_5 &= 50 - 2 \left(20 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \right) - \frac{5}{3}x_2,\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}x_3 &= 35 - \frac{7}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_4; \\x_1 &= 20 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4; \\x_5 &= 10 - x_2 + \frac{2}{3}x_4.\end{aligned}$$

En fixant les variables hors-base à 0, nous obtenons comme nouvelle solution de base réalisable $(20, 0, 35, 0, 10)$. L'objectif devient

$$\max z = 2 \left(20 - \frac{1}{3}x_2 - \frac{1}{3}x_4 \right) + x_2,$$

soit

$$\max z = 40 + \frac{1}{3}x_2 - \frac{2}{3}x_4.$$

Comme le coefficient de x_2 est positif, la solution n'est pas optimale. Ceci termine la première itération du simplexe.

Nous pouvons continuer en sélectionnant x_2 comme variable entrant dans la base (puisque c'est la seule avec un coût réduit positif dans l'objectif). Nous gardons x_4 à 0, ce qui donne, avec les contraintes de non-négativité,

$$\begin{aligned}x_3 &= 35 - \frac{7}{3}x_2 \geq 0; \\x_1 &= 20 - \frac{1}{3}x_2 \geq 0; \\x_5 &= 10 - x_2 \geq 0.\end{aligned}$$

La première contrainte active en augmentant x_2 est la contrainte associée à x_5 , aussi nous faisons sortir x_5 de la base. En réécrivant le système par rapport aux nouvelles variables hors-base, nous obtenons

$$\begin{aligned}x_3 &= 35 - \frac{7}{3} \left(10 + \frac{2}{3}x_4 - x_5 \right) + \frac{2}{3}x_4; \\x_1 &= 20 - \frac{1}{3} \left(10 + \frac{2}{3}x_4 - x_5 \right) - \frac{1}{3}x_4; \\x_2 &= 10 + \frac{2}{3}x_4 - x_5,\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}x_1 &= 17 - \frac{1}{3} - \frac{5}{9}x_4 + \frac{1}{3}x_5; \\x_2 &= 10 + \frac{1}{3}x_4 - x_5, \\x_3 &= 12 - \frac{1}{3} - \frac{8}{9}x_4 + \frac{7}{3}x_5;\end{aligned}$$

L'objectif devient

$$\max z = 40 + \frac{1}{3} \left(10 + \frac{2}{3}x_4 - x_5 \right) - \frac{2}{3}x_4,$$

soit

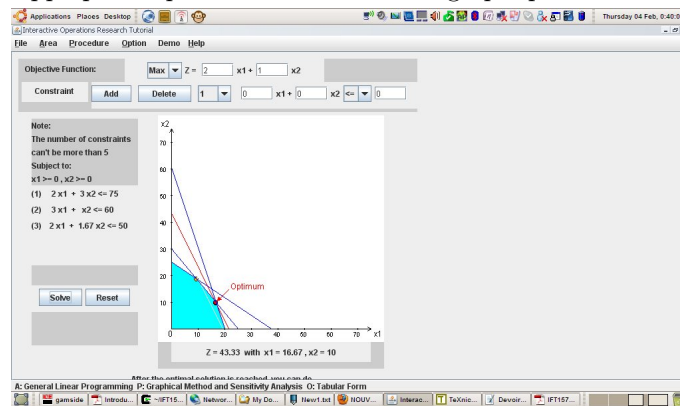
$$\max z = 43 + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}x_4 - \frac{1}{3}x_5.$$

La solution de base réalisable

$$\left(17 - \frac{1}{3}, 10, 12 - \frac{1}{3}, 0, 0 \right)$$

est optimale comme tous les coûts réduits sont négatifs. La valeur optimale est $43 + \frac{1}{3}$.

4. Appliquez la procédure de résolution graphique de IOR Tutorial.



5. Appliquez la procédure du simplexe interactive de IOR Tutorial et produisez le fichier d'itérations correspondant.

La résolution avec IOR donne

Linear Programming Model:

Number of Decision Variables: 2

Number of Functional Constraints: 3

$$\text{Max } Z = 2 X_1 + 1 X_2$$

subject to

$$1) \quad 2 X_1 + 3 X_2 \leq 75$$

$$2) \quad 3 X_1 + 1 X_2 \leq 60$$

$$3) \quad 2 X_1 + 1.67 X_2 \leq 50$$

and

$$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0.$$

Solve Interactively by the Simplex Method:

Bas Eq	Coefficient of					Right
Var No Z	X1	X2	X3	X4	X5	side
Z 0 1	-2	-1	0	0	0	0
X3 1 0	2	3	1	0	0	75
X4 2 0	3*	1	0	1	0	60
X5 3 0	2	1.67	0	0	1	50

Bas Eq	Coefficient of					Right
Var No Z	X1	X2	X3	X4	X5	side
Z 0 1	0	-0.33	0	0.667	0	40
X3 1 0	0	2.333	1	-0.67	0	35
X1 2 0	1	0.333	0	0.333	0	20
X5 3 0	0	1.003*	0	-0.67	1	10

Bas Eq	Coefficient of					Right
Var No Z	X1	X2	X3	X4	X5	side
Z 0 1	0	0	0	0.445	0.332	43.32
X3 1 0	0	0	1	0.884	-2.33	11.74

$$\begin{array}{r|l|l|l|l|l|l|l|l|l}
X1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.555 & -0.33 & | & 16.68 \\
X2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0.66 & 0.997 & | & 9.967
\end{array}$$

Nous obtenons ainsi la solution optimale (16.69, 9.967), correspondant à un profit de 43.32. Constatons au passage que la correspondance des nombres avec la procédure manuelle, à chaque étape du simplexe.

6. Comparez les solutions et concluez.

En raison de l'arrondi de $5/3$ en 1.67, les procédures numériques donnent des solutions approchées de la solution réelle obtenue à l'aide de la méthode manuelle, qui est cependant lourde à employer. A toute fins pratiques, nous pouvons considérer que les trois méthodes donnent la même solution, ce qui est normal vu que le minimum est unique, et que la procédure du simplexe est une méthode exacte. En théorie, il est toujours possible d'identifier de manière exacte la solution d'un programme linéaire.