

IFT-1575
Devoir 2

Date de remise : 11 février 2010.

Le devoir est individuel. Le règlement sur le plagiat sera d'application.

1. (3 pts) La fonction $f(x)$ est concave, mais non nécessairement différentiable. Trouvez les valeurs des constantes a et b pour lesquelles la fonction $af(x) + b$ est concave. L'argumentation doit être générale (en particulier, elle ne peut s'appliquer à des fonctions différentiables seules).

Comme nous ne pouvons faire aucune hypothèse de différentiabilité, autrement dit nous ne pouvons pas présumer de l'existence des dérivées partielles, nous devons nous en tenir à la définition de concavité.

Nous savons, par hypothèse de concavité, que

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y),$$

pour tous $x, y \in \text{dom}f(x)$, $\lambda \in [0, 1]$.

Par conséquent

$$af(\lambda x + (1 - \lambda)y) + b \geq a(\lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)) + (\lambda + 1 - \lambda)b,$$

pour tout $a \geq 0$ et $b \in \mathcal{R}$. Par conséquent,

$$af(\lambda x + (1 - \lambda)y) + b \geq \lambda(af(x) + b) + (1 - \lambda)(af(y) + b).$$

Autrement $af(x) + b$ est concave pour a positif et b réel.

Si a est négatif, quel que soit b , nous avons

$$af(\lambda x + (1 - \lambda)y) + b \leq \lambda(af(x) + b) + (1 - \lambda)(af(y) + b).$$

En d'autres termes, $af(x) + b$ est alors convexe.

2. (3 pts) Déterminez la concavité/convexité de

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 8x - 3.$$

Comme $f(x)$ est deux fois continûment dérivable, nous pouvons calculer sa dérivée seconde :

$$\frac{d^2 f(x)}{dx} = -\frac{2}{3} < 0.$$

$f(x)$ est dès lors strictement concave.

3. Une entreprise médicale fabrique des valves cardio-vasculaires mécaniques à partir de valves organiques. Différentes opérations du coeur exigent différentes tailles de valves. Trois fournisseurs offrent des valves organiques. Le coût et la taille des valves achetées à chaque fournisseur sont résumés ci-dessous :

| Fournisseur | Coût (\$) | % Large | % Moyen | % Petit |
|-------------|-----------|---------|---------|---------|
| 1 | 5 | 40 | 40 | 20 |
| 2 | 4 | 30 | 35 | 35 |
| 3 | 3 | 20 | 20 | 60 |

Chaque mois, les laboratoires canadiens place une commande auprès de chaque fournisseur. Au moins 500 grandes, 300 moyennes et 300 petites valves doivent être achetées chaque mois, mais un fournisseur particulier ne peut fournir plus de 700 valves par mois. Comment acheter les valves afin de minimiser les coûts ?

- (a) (6 pts) Formulez le programme mathématique décrivant le problème. Les variables sont les commandes à passer aux trois compagnies. Notons-les x_1 , x_2 et x_3 . L'objectif est le coût total des commandes, que nous souhaitons minimiser :

$$\min z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3.$$

Les premières contraintes consistent à satisfaire les capacités de production des fournisseurs :

$$x_i \leq 700, \quad i = 1, 2, 3.$$

Nous devons satisfaire les besoins minimums, ce qui se traduit par

$$\begin{aligned} 0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 &\geq 500, \\ 0.4x_1 + 0.35x_2 + 0.2x_3 &\geq 300, \\ 0.2x_1 + 0.35x_2 + 0.6x_3 &\geq 300. \end{aligned}$$

Reste les traditionnelles contraintes de positivité :

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Le programme résultant est

$$\begin{aligned} \min z &= 5x_1 + 4x_2 + 3x_3. \\ \text{s.c. } x_i &\leq 700, \quad i = 1, 2, 3. \\ 0.4x_1 + 0.3x_2 + 0.2x_3 &\geq 500, \\ 0.4x_1 + 0.35x_2 + 0.2x_3 &\geq 300, \\ 0.2x_1 + 0.35x_2 + 0.6x_3 &\geq 300. \\ x_i &\geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \end{aligned}$$

(b) (6 pts) Ecrivez-le en GAMS et résolvez-le.

Code GAMS :

SET

j Sizes of valves /L,M,S/,

i Suppliers /1*3/;

TABLE data

| | Cost | L | M | S |
|----------|------|-----|-----|------|
| 1 | 5 | 40 | 40 | 20 |
| 2 | 4 | 30 | 35 | 35 |
| 3 | 3 | 20 | 20 | 60 |
| Required | | 500 | 300 | 300; |

PARAMETER

c(i) Cost of orders

r(j) Requirements

s(i,j) Yields;

s(i,j) = data(i,j)/100;

c(i) = data(i,"Cost");

r(j) = data("Required",j);

VARIABLES

z Cost;

POSITIVE VARIABLES

x(i) Number ordered

y(j) Yield;

EQUATIONS

cost, yield;

cost.. z =e= sum(i, x(i)*c(i));

yield(j).. y(j) =e= sum(i, x(i)*s(i,j));

y.lo(j) = r(j);

x.up(i) = 700;

MODEL mincost /cost,yield/;

SOLVE mincost using lp minimizing z;

La résolution donne

LOWER LEVEL UPPER MARGINAL

```

---- VAR z          -INF   6450.000   +INF   .

  z  Cost

---- VAR x  Number ordered

      LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL

1      .      700.000   700.000   -1.000
2      .      700.000   700.000   -0.500
3      .      50.000    700.000   .

---- VAR y  Yield

      LOWER      LEVEL      UPPER      MARGINAL

L  500.000   500.000   +INF      15.000
M  300.000   535.000   +INF      .
S  300.000   415.000   +INF      .

```

Autrement, le coût optimal est de 6450\$, et nous achetons au maximum auprès des deux premiers fournisseurs, i.e. 700 unités chacun, bien qu'ils soient plus chers que le troisième fournisseur, auquel on n'achète que 50 unités. Ceci s'explique par le fait que le troisième fournisseur ne produit que peu de grandes valves, qui sont très demandées.

La variable y indique que nous n'obtenons pas plus de grandes valves que nécessaire, au contraire des petites et moyennes valves. Celles-ci étant produites par les fournisseurs plus chers, elles s'avèrent primordiales dans notre choix.

(c) (2 pts) Que vaut la solution du programme dual associé ?

Outre les contraintes de positivité, nous avons 6 contraintes, donnant lieu à 6 variables duales. La colonne **MARGINAL** nous donne directement la solution duale optimale :

$$(1, 0.5, 0, 15, 0, 0)$$

Nous voyons que les deux premiers fournisseurs tournent à pleine capacité (les contraintes associées sont actives). Bien que plus coûteuse, le premier fournisseur a la sensibilité la plus forte sur la solution, vu que la variable duale est plus importante que pour le second fournisseur. Une augmentation marginale de la capacité de production du premier fournisseur entraînerait une plus forte réduction totale de coût. Ceci s'explique par sa production accrue en grandes valves.

Les contraintes sur les quantités minimales ne donnent lieu qu'à une contrainte active : celle sur les grandes valves. La valeur élevée de la

variable duale associée est attendue comme ce type de valve conditionne de manière prédominante les commandes, et donc le prix payé.