

# IFT-1575

## Devoir 3

---

Date de remise : 25 mars 2010.

Le devoir est individuel. Le règlement sur le plagiat sera d'application.

1. Considérons l'exemple 1 (chapitre 1) des notes de cours. Vérifiez la solution proposée en traduisant le programme mathématique en GAMS. Donnez la solution et la valeur optimales.

Numérotons les villes Portland, Brunswick, Lewiston, Waterville de 1 à 4. Nous pouvons écrire le code GAMS suivant.

Sets

```
      i      cities / 1*4 /
```

```
alias (i,j);
```

Table dist(i,j) distances

	1	2	3	4
1	0	26	34	78
2	26	0	18	52
3	34	18	0	51
4	78	52	51	0 ;

Variables

```
      z;
```

Binary Variables

```
      x(i,j) link usage;
```

Equations

```
      distance
      diag(i)  no path from a town to itself
      colsum(i) subtour elimination
      rowsum(j) subtour elimination
      cycle(i,j) avoid cycling between two cities;
```

distance..

```
      z =e= sum((i,j), x(i,j) * dist(i,j));
```

```
diag(i)..
  x(i,i) =e= 0;

colsum(i)..
  sum(j, x(i,j)) =e= 1;

rowsum(j)..
  sum(i, x(i,j)) =e= 1;

cycle(i,j)..
  x(i,j) + x(j,i) =l= 1;
```

```
Model tsp /all/;
```

```
Solve tsp using mip minimizing z;
```

Nous retrouvons la solution des notes de cours,  $x_{1,2} = x_{2,4} = x_{4,3} = x_{3,1} = 1$ , à savoir le parcours Portland, Brunswick, Waterville, Lewiston, Portland, pour une distance optimale de 163 miles.

2. Utilisez IOR Tutorial pour résoudre le problème suivant :

$$\begin{aligned} \max z &= 5x_1 + 5x_2 + 8x_3 - 2x_4 - 4x_5 \\ \text{s.c. } &- 3x_1 + 6x_2 - 7x_3 + 9x_4 + 9x_5 \geq 10, \\ &x_1 + 2x_2 - x_4 - 3x_5 \leq 0, \\ &x_j \in \{0,1\}, j = 1,2,\dots,5. \end{aligned}$$

Veillez sauver le résultat en format texte, en utilisant le menu File d'IOR Tutorial et joindre une copie imprimée de celui-ci.

Nous obtenons le résultat suivant :

Interactive Binary Integer Programming Branch and Bound Algorithm

Model:

Max Z = 5 X1 + 5 X2 + 8 X3 - 2 X4 - 4 X5

subject to

1) -3 X1 + 6 X2 - 7 X3 + 9 X4 + 9 X5 >= 10

2) 1 X1 + 2 X2 + 0 X3 - 1 X4 - 3 X5 <= 0

and

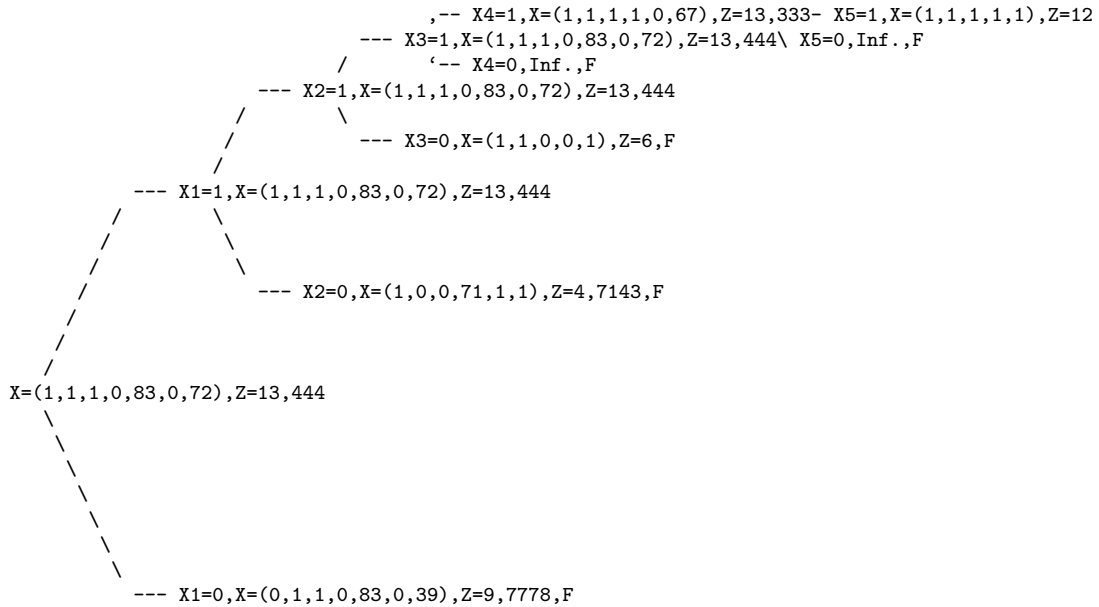
X1 = {0,1}, X2 = {0,1}, X3 = {0,1}, X4 = {0,1}, X5 = {0,1}.

Optimal Solution:

(X1, X2, X3, X4, X5) = (1, 1, 1, 1, 1)

Z = 12

Solution Tree:



3. Considérons une firme qui reçoit des chèques des divers coins du pays. En raison des caprices du service postal, ainsi que du système bancaire, il y a un délai variable entre l'émission du chèque et son encaissement. Par exemple, un chèque envoyé de Montréal vers une autre adresse montréalaise peut être encaissé en deux jours, tandis que cela prendrait huit jours s'il était envoyé à Vancouver. La firme a pourtant avantage à encaisser un chèque aussi rapidement que possible afin de pouvoir utiliser l'argent. Afin d'accélérer le processus, elle peut se tourner vers des bureaux d'encaissement, situés dans différentes villes.

Supposons par exemple que l'entreprise reçoive des paiements de 4 régions : Est, Centre-Est, Centre-Ouest, Ouest. La valeur moyenne quotidienne des paiements de chaque région vaut : \$70000 de l'Ouest, \$50000 du Centre-Ouest, \$60000 du Centre-Est, et \$40000 du de l'Est. Nous envisageons la possibilité d'ouvrir un bureau d'encaissement à Halifax, Toronto, Edmonton, Vancouver. Les coûts de gestion d'un bureau d'encaissement sont évalués à \$50000 par an, et les temps moyen entre l'envoi et l'encaissement d'un chèque sont donnés la Table 1. Quels bureaux devrions-nous ouvrir ? Nous devons tout d'abord calculer les pertes pour chaque affectation pos-

Lieux	Vancouver	Edmonton	Toronto	Halifax
Ouest	2	6	8	8
Centre-Ouest	6	2	5	5
Centre-Est	8	5	2	5
Est	8	5	5	2

TABLE 1 – Temps de traitement.

sible. Par exemple, si l'Ouest envoie à Toronto, alors en moyenne, il y aura \$560000 dans le processus chaque jour. En supposant un taux d'investissement de 20%, ceci correspond à une perte annuelle de \$112000. Nous pouvons procéder de même pour chaque couple d'affectation, ce qui donne la Table 2.

Lieux	Vancouver	Edmonton	Toronto	Halifax
Ouest	28	84	112	112
Centre-Ouest	60	20	50	50
Centre-Est	96	60	24	60
Est	64	40	40	16

TABLE 2 – Pertes (en milliers de dollars).

Modélisez le problème en tenant compte des points suivants.

- Nous souhaitons minimiser le coût total annuel (coûts d'exploitation des bureaux d'encaissement ouverts, et pertes dues aux délais de traitement).

- De plus, chaque région doit être affectée à un bureau (et un seul) pour ses envois. Autrement dit, tous les envois d'une région donnée partiront au même bureau.
- Il ne faut non plus oublier de prendre en compte le fait que pour que les régions puissent envoyer à un bureau dans une ville donnée, celui-ci doit-être ouvert. Si nous n'ouvrons pas de bureau dans une ville donnée, alors aucune région ne pourra envoyer les chèques dans cette ville.

Résolvez le MIP résultant à l'aide de GAMS.

Numérotons les villes de 1 à 4 : Vancouver = 1, Edmonton = 2, Toronto = 3 et Halifax = 4. De même, posons Ouest = 1, Centre-Ouest = 2, Centre-Est = 3, Est = 4. Ceci nous permet de définir les variables suivantes, pour  $i = 1, \dots, 4$  et  $j = 1, \dots, 4$  :

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si on ouvre un bureau dans la ville } i, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$x_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si la région } i \text{ envoie ses chèques au bureau situé dans la ville } j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La fonction objectif est le coût total, constitué du coût fixe de gestion des bureaux ouverts, et des pertes d'investissement dues aux délais de traitement :

$$z = \sum_{i=1}^4 p_i y_i + \sum_{i,j=1}^2 c_{ij} x_{ij}.$$

Affecter une région à un et seul bureau peut se formaliser comme suit :

$$\sum_{j=1}^4 x_{ij} = 1, \quad i = 1, \dots, 4.$$

Encore faut-il que le bureau soit ouvert :

$$x_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, \dots, 4, \quad j = 1, \dots, 4.$$

Nous pouvons simplifier ces contraintes en introduisant un grand  $M$  :

$$\sum_{i=1}^4 x_{ij} \leq M y_j, \quad j = 1, \dots, 4,$$

vu que  $y_j = 0$  implique bien que  $x_{ij} = 0$ , pour  $i = 1, \dots, 4$ , et si  $M$  est assez grand,  $y_j = 1$  rend réalisable  $x_{ij} = 1$ . Dans notre cas, il suffit de prendre  $M$  supérieur ou égal à 4.

Le problème peut dès lors s'écrire comme

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^4 p_i y_i + \sum_{i,j=1}^2 c_{ij} x_{ij}, \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^4 x_{ij} &= 1, \quad i = 1, \dots, 4, \\ \sum_{i=1}^4 x_{ij} &\leq 4y_j, \quad j = 1, \dots, 4. \end{aligned}$$

```

/1*4/; set j bureau /1*4/;
table c(i,j) 1 2 3 4 1 28 84 112 112 2 60 20 50 50 3 96 60 24 60 4 64 40 40
16;
parameter p(j) coût d'exploitation annuel /1 50, 2 50, 3 50, 4 50/;
binary variable x(i,j) 1 si la région i envoie ses chèques au bureau j et 0
sinon y(j) 1 si le bureau j est ouvert et 0 sinon;
variable Z coût annuel;
equations cout coût annuel aff(i) affectation de la région i à un seul bureau
envoi(j) envois vers des bureaux ouverts;
cout.. Z =e= sum(j, p(j)*y(j))+sum((i,j), c(i,j)*x(i,j));
aff(i).. sum(j, x(i,j)) =E= 1;
envoi(j).. sum(i, x(i,j))=L= 4*y(j);
model cheques /all/;
solve cheques using MIP minimizing Z;

```

Nous obtenons comme coût optimal 242,000\$, correspond à la politique suivante :

- l'Ouest envoie vers Vancouver;
- le Centre-Ouest, le Centre-Est et l'Est envoient vers Toronto.

Seuls les bureaux de Vancouver et Toronto sont ouverts.