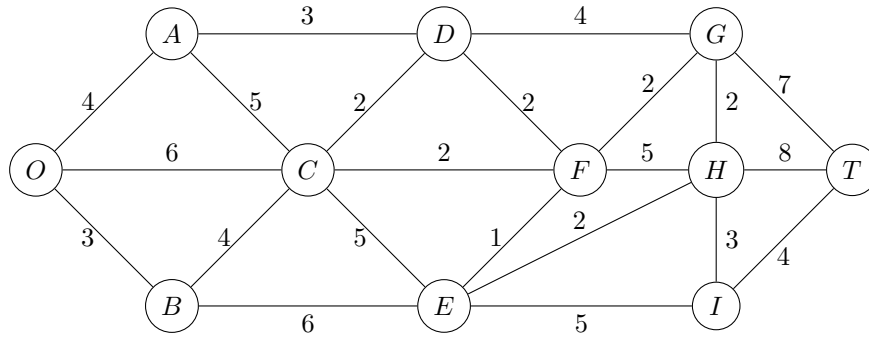


IFT-1575
Devoir 4

Date de remise : 8 avril 2010.

Le devoir est individuel. Le règlement sur le plagiat sera d'application.

1. Soit le graphe



Trouvez le plus court chemin en utilisant

– (4 pts) Dijkstra ;

It.	Sommet marqué	S	$N \setminus S$	Voisins non marqués	Dist.	Préd.
0	-	\emptyset	N	-	-	-
1	O	{O}	{A, B, C, D, E, F, G, H, I, T}	A B C	4 3 6	O O O
2	B	{O, B}	{A, C, D, E, F, G, H, I, T}	C E	6 9	O B
3	A	{O, A, B}	{C, D, E, F, G, H, I, T}	D C	7 6	A O
4	C	{O, A, B, C}	{D, E, F, G, H, I, T}	D E F	7 9 8	A B C
5	D	{O, A, B, C, D}	{E, F, G, H, I, T}	G F	11 8	D C
6	F	{O, A, B, C, D, F}	{E, G, H, I, T}	E G H	9 10 13	B F F
7	E	{O, A, B, C, D, E, F}	{G, H, I, T}	H I	11 14	E E
8	G	{O, A, B, C, D, E, F, G}	{H, I, T}	H T	11 17	E G
9	H	{O, A, B, C, D, E, F, G, H}	{I, T}	T I	17 14	G E
10	I	{O, A, B, C, D, E, F, G, H, I}	{T}	T	17	G
11	T	N	\emptyset	-	-	-

Nous avons donc comme distance minimale de O à T, avec comme chemin

$$O \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow T.$$

– (4 pts) Bellman-Ford.

Nous allons considérer les arêtes de gauche à droite et de haut en bas. Nous obtenons les itérations suivantes, en initialisant les étiquettes de chaque noeud à $+\infty$, sauf pour O , pour laquelle nous mettons l'étiquette à 0 :

$$(0, A, B, C, D, E, F, G, H, I, T) = (0, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty, +\infty).$$

Nous prenons en compte les modifications d'étiquettes effectuées en cours d'itération (ce qui revient à exploiter les lignes précédentes du tableau d'une itération).

1.

Arête	Etiquette Origine	Etiquette Destination	Préd. Orig.	Préd. Dest.
{O, A}	0	4	O	O
{O, C}	0	6	O	O
{O, B}	0	3	O	O
{A, D}	4	7	O	A
{A, C}	4	6	O	O
{B, C}	3	6	O	O
{B, E}	3	9	O	B
{C, D}	6	7	O	A
{C, F}	6	8	O	C
{C, E}	6	9	O	B
{D, G}	7	11	A	D
{D, F}	7	8	A	C
{E, F}	9	8	B	C
{E, H}	9	11	B	E
{E, I}	9	14	B	E
{F, G}	8	10	C	F
{F, H}	8	11	C	E
{G, H}	10	11	F	E
{H, I}	11	14	E	E
{G, T}	10	17	F	G
{H, T}	11	17	E	G
{I, T}	14	17	E	G

En résumé, nous avons les étiquettes suivantes :

$$(0, A, B, C, D, E, F, G, H, I, T) = (0, 4, 3, 6, 7, 9, 8, 10, 11, 14, 17).$$

2.

Arête	Etiquette Origine	Etiquette Destination	Préd. Orig.	Préd. Dest.
{O, A}	0	4	O	O
{O, C}	0	6	O	O
{O, B}	0	3	O	O
{A, D}	4	7	O	A
{A, C}	4	6	O	O
{B, C}	3	6	O	O
{B, E}	3	9	O	B
{C, D}	6	7	O	A
{C, F}	6	8	O	C
{C, E}	6	9	O	B
{D, G}	7	10	A	F
{D, F}	7	8	A	C
{E, F}	9	8	B	C
{E, H}	9	11	B	E
{E, I}	9	14	B	E
{F, G}	8	10	C	F
{F, H}	8	11	C	E
{G, H}	10	11	F	E
{H, I}	11	14	E	E
{G, T}	10	17	F	G
{H, T}	11	17	E	G
{I, T}	14	17	E	G

Ceci donne les étiquettes

$$(0, A, B, C, D, E, F, G, H, I, T) = (0, 4, 3, 6, 7, 9, 8, 10, 11, 14, 17).$$

Aucune étiquette n'a été modifiée. Nous pouvons stopper l'algorithme.

L'étiquette de T , 17, donne la longueur du plus court chemin, qui est, en suivant les prédécesseurs,

$$O \rightarrow C \rightarrow F \rightarrow G \rightarrow T.$$

Nous retrouvons bien le même chemin.

2. (8 pts) Considérons la construction d'une maison, et nous voulons connaître la durée des travaux préliminaires. Cinq tâches sont considérées.

Tâche	Description	Durée (jours)
1	Exécution des terrassements	10
2	Mise en place de la grue	2
3	Fondations	5
4	Branchement électrique	3
5	Installation de la fosse septique	6

Nous avons les contraintes suivantes :

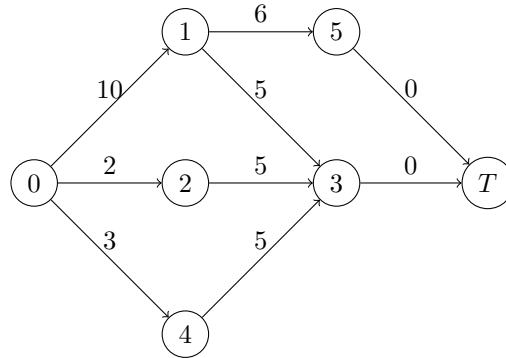
- (a) la grue ne peut fonctionner que si le branchement électrique est effectué ;
- (b) nous avons besoin de la grue pour les fondations ;

(c) l'installation de fosse septique et les fondations ne peuvent être exécutés que si les travaux de terrassement sont terminés.

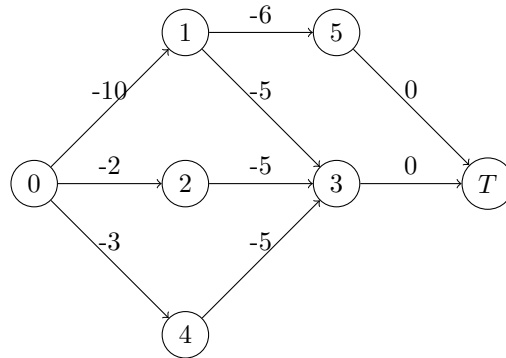
Quelle est la durée minimale totale des travaux? Soyez précis dans le développement de votre réponse.

Tâche	Description	Durée (jours)	Tâches préalables
1	Exécution des terrassements	10	
2	Mise en place de la grue	2	
3	Fondations	5	1, 2, 4
4	Branchement électrique	3	
5	Installation de la fosse septique	6	1

Ceci donne le graphe suivant.



En prenant l'opposé de chaque poids, nous obtenons le graphe



L'algorithme de Bellman-Ford conduit aux itérations suivantes de correction d'étiquettes, en considérant les arcs de gauche à droite, et de haut en bas.

Itér.	0	1	2	3	4	5	T
0	0	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
1	0	-10	-2		-3		
	0	-10	-2	-15	-3	-16	-16
2	0	-10	-2	-15	-3	-16	-16

La durée minimale des travaux est dès lors de 16 jours, avec comme activités critiques les tâches 1 et 5.

3. (4 pts) Formulez le problème de plus court chemin comme un problème de programmation linéaire.

On peut voir le problème de plus court chemin comme un problème de flot avec une source à l'origine et un puits à la destination. Supposons sans perte de généralité que l'origine est le noeud 1 et la destination le noeud n . La formulation en programme linéaire est

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s.c. } \sum_{j=1}^n x_{1j} - \sum_{j=1}^n x_{j1} &= 1, \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} - \sum_{j=1}^n x_{ji} &= 0, \quad i = 2, \dots, n-1, \\ \sum_{j=1}^n x_{nj} - \sum_{j=1}^n x_{jn} &= -1, \\ 0 \leq x_{ij} \leq 1, \quad i &= 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$