

IFT-1575

Devoir 5

Date de remise : 15 avril 2010.

Le devoir est individuel. Le règlement sur le plagiat sera d'application.

1. (*Hiller et Lieberman, ex. 11.3-3*) Une compagnie planifie sa stratégie publicitaire de ses trois produits phares pour la prochaine année. Vu que chaque produit est différent, chaque effort publicitaire portera sur un seul produit. Un total de 6 millions de dollars est disponible comme budget publicitaire pour l'année à venir. La dépense publicitaire doit être un entier supérieur ou égal à 1, en utilisant comme unité les millions de dollars. Le vice-président du marketing a comme objectif de déterminer combien dépenser pour chaque produit afin de maximiser les ventes totales. Le tableau ci-dessous donne les augmentations attendues pour les ventes (en millions de dollars), en fonction des dépenses publicitaires.

Dépense publicitaire	Produit 1	Produit 2	Produit 3
1	7	4	6
2	10	8	9
3	14	11	13
4	17	14	15

Utilisez la programmation dynamique pour résoudre ce problème.

Il s'agit d'un problème d'affectation de ressources : nous avons 6 millions à affecter à 3 produits, dont nous souhaitons faire la promotion. Nous pouvons dès lors considérer 3 étapes, correspondant aux 3 produits, et la politique optimale sera l'affectation optimale, permettant de maximiser le revenu. Autrement dit, la fonction objectif est

$$f_n^*(s_n) = \max_{1 \leq x_n \leq s_n} \{p_n(x_n) + f_{n+1}^*(s_n - x_n)\},$$

où x_n est l'investissement (en millions de dollars) dépensé pour le produit n , s_n est le budget publicitaire disponible, p_n est l'augmentation dans les ventes du produit n quand x_n millions sont dépensés en publicités pour ce produit.

Sur base du principe d'optimalité de Bellman, nous considérons le dernier produit. L'ensemble des états possible donne le montant disponible. Nous utiliserons la phrase "La dépense publicitaire doit être un entier supérieur ou égal à 1" pour exclure le cas où il n'y a plus d'argent disponible (considérer le cas où on a tout dépensé donnerait la même réponse, et est accepté dans la correction). Nous avons le tableau de décisions

s_3	$f_3^*(s_3)$	x_3^*
1	6	1
2	9	2
3	13	3
(\geq) 4	15	4

A l'étape 2, nous devons disposer d'un montant minimum de 2 millions afin d'en garder 1 à l'étape 3, et de maximum 5 millions vu que nous devons investir au moins 1 million pour le produit 1. Ceci donne le tableau ci-dessous.

s_2	$f_2(s_2, x_2)$				$f_2(s_2, x_2)$	x_2^*
	$x_2 = 1$	$x_2 = 2$	$x_2 = 3$	$x_2 = 4$		
2	4+6 = 10	-	-	-	10	1
3	4+9 = 13	8+6 = 14	-	-	14	2
4	4+13 = 17	8 + 9 = 17	11+6 = 17	-	17	1,2,3
5	4+15 = 19	8+13 = 21	11 + 9 = 20	14 + 6 = 20	21	2

A l'étape 1, nous n'avons encore rien investi, autrement dit, les 6 millions de départ sont disponibles et constituent l'état initial. Comme s_2 doit valoir au minimum 2, nous avons aussi $1 \leq x_1 \leq 6$.

s_1	$f_1(s_1, x_1)$				$f_1(s_1, x_1)$	x_1^*
	$x_1 = 1$	$x_1 = 2$	$x_1 = 3$	$x_1 = 4$		
6	7+21 = 28	10 + 17 = 27	14+14 = 28	17+10 = 27	28	1,3

Le gain optimal vaut dès lors 28 millions, et est atteint avec chacune des politiques suivantes :

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 2, 3) \text{ ou}$$

$$(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (3, 2, 1)$$

Note additionnelle : nous pouvons également décrire le problème sous forme de graphe, comme représenté sur la Figure 1. Une politique optimale correspond alors à un plus long chemin, dont le poids total donne le gain optimal.

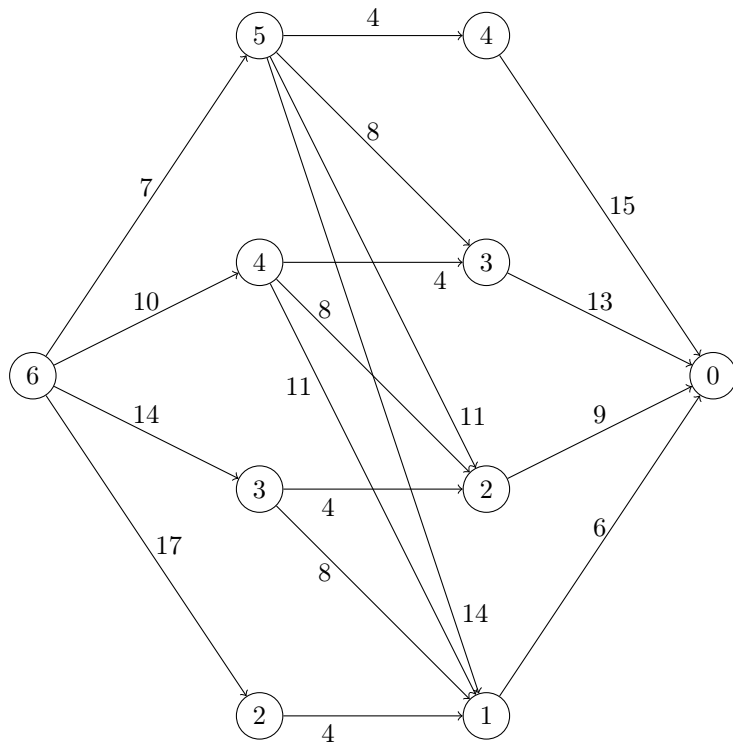


FIGURE 1 – Affectations de dépenses publicitaires.