

Programmation stochastique

Devoir 1 - Correction

Fabian Bastin

IFT-6512 – Hiver 2011

Exercice 1

Considérons le programme de seconde étape

$$Q(x, \xi) = \min_y \{y \mid \xi y = 1 - x, y \geq 0\}.$$

On suppose que ξ suit une distribution triangulaire sur $[0, 1]$, à savoir $P[\xi \leq u] = u^2$.

(a) Peut-on parler de recours fixe ? Pourquoi ?

On ne peut parler de recours fixe puisqu'ici, en suivant les notations adoptées en cours, $W \equiv \xi$, et donc est aléatoire. Comme ξ peut prendre la valeur 0, la transformation

$$y = 1/\xi - x/\xi,$$

n'est pas correctement définie sur $\Xi = [0, 1]$; elle signifie aussi que

$$W = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi = 0; \\ 1 & \text{si } \xi \neq 0. \end{cases}$$



Exercice 1 - suite

(b) Exprimez $K_2(\xi)$ pour tout ξ dans $[0, 1]$.

Nous allons devoir considérer deux cas : $\xi = 0$ ou $\xi \in (0, 1]$.

1. $\xi \in (0, 1]$ Dans ce cas, comme $y, \xi \geq 0$, $1 - x$ doit être non-négatif pour que le problème soit bien défini :

$$K_2(\xi) = \{x \mid x \leq 1\}.$$

La valeur et la solution optimales sont

$$Q^*(x, \xi) = (1 - x)/\xi, \quad y^* = (1 - x)/\xi.$$

2. $\xi = 0$ Il n'existe pas de y tel que $0 \cdot y = 1 - x$, à moins que $x = 1$, aussi

$$K_2(0) = \{1\}.$$

Exercice 1 - suite

(c) Exprimer K_2 , K_2^P et Q .

De ce qui précède,

$$K_2^P = \{x \mid x \leq 1\} \cap \{1\} = \{1\}.$$

Nous avons aussi, vu que $P[\xi = 0] = 0$,

$$Q(x) = \int_0^1 \frac{1-x}{\xi} 2\xi d\xi = 2(1-x), \forall x \leq 1.$$

Par conséquent $K_2^P \subset K_2 = \{x \leq 1\}$.

La différence tient au fait qu'un point n'est pas dans K_2^P dès qu'il est irréalisable pour une certaine valeur de ξ , quelle que soit la distribution de ξ ; K_2 ne fait pas intervenir les infaisabilités se présentant avec une probabilité nulle.

Rappel : pour un programme stochastique avec un recours fixe (pas le cas ici !) où ξ a des moments seconds finis, $K_2 = K_2^P$.

Exercice 2

Soit le programme de seconde étape défini par

$$\begin{aligned} \min_y \quad & 2y_1 + y_2 \\ \text{t.q.} \quad & y_1 + y_2 \geq 1 - x_1, \\ & y_1 \geq \xi - x_1 - x_2, \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Montrez que ce programme a un recours complet si ξ est d'espérance finie.

Recours complet ? Il faut que pour tout $z \in \mathbb{R}^2$, on puisse trouver $y \geq 0$ t.q. $Wy = z$. Le recours complet est une propriété de W , mais vaut W ? De manière équivalente, on veut $\text{pos}W = \mathbb{R}^2$.

Exercice 4 - suite

Petite difficulté : le problème n'est pas sous forme standard. L'idée est en fait de montrer pour tout $z \in \mathbb{R}^2$, il existe $y \geq 0$ t.q. $Wy \geq z$. L'équivalence avec $\text{pos}W$ ne fonctionne plus. Sauf si nous nous ramenons à la forme standard !

Sous forme standard, le problème devient

$$\begin{aligned} \min_y & 2y_1 + y_2 \\ \text{t.q.} & y_1 + y_2 - s_1 = 1 - x_1, \\ & y_1 - s_2 = \xi - x_1 - x_2, \\ & y_1, y_2 \geq 0, \\ & s_1, s_2 \geq 0, \end{aligned}$$

et il y a recours complet si pour tout $z \in \mathbb{R}^2$, il existe $y, s \geq 0$ vérifiant

$$Wy = z.$$

Exercice 2 - suite

Explicitons $Wy = z$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, nous devons trouver $y_1, y_2, s_1, s_2 \geq 0$ tel que

$$y_1 + y_2 - s_1 = z_1.$$

$$y_1 - s_2 = z_2.$$

La deuxième équation nous donne la possibilité de prendre

$$\begin{cases} y_1 = z_2, s_2 = 0 & \text{si } z_2 \geq 0, \\ y_1 = 0, s_2 = -z_2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons aussi

$$y_2 - s_1 = z_1 - y_1.$$

En utilisant nos précédents choix, nous pouvons prendre pour y_2 ce qui suit. Si $z_2 \geq 0$, $y_2 - s_1 = z_1 - z_2$, et nous prenons

$$\begin{cases} y_2 = z_1 - z_2, s_1 = 0 & \text{si } z_1 - z_2 \geq 0, \\ y_2 = 0, s_2 = z_2 - z_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De même, si $z_2 \leq 0$, $y_2 - s_1 = z_1$, et il suffit de choisir

$$\begin{cases} y_2 = z_1, s_1 = 0 & \text{si } z_1 \geq 0, \\ y_2 = 0, s_2 = -z_1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, quel que soit z , on peut trouver une solution non-négative au système

$$W \begin{pmatrix} y \\ s \end{pmatrix} = z,$$

i.e. le recours est complet !

La condition d'espérance finie sert surtout à garantir que le problème de seconde étape est bien défini. On peut en effet montrer que $Q(x)$ n'est pas fini si ξ n'est pas d'espérance finie (l'expression de $Q(x)$ fait intervenir ξ).

Considérons le programme de deuxième défini comme suit :

$$\begin{aligned} \min_y \quad & 2y_1 + y_2 \\ \text{t.q.} \quad & y_1 - y_2 \leq 2 - \xi x_1, \\ & y_2 \leq x_2, \\ & y_1, y_2 \geq 0. \end{aligned}$$

Trouvez $K_2(\xi)$ et K_2 pour :

- 1 $\xi \sim U[0, 1]$.
- 2 $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\lambda > 0$.

Quelles propriétés attendez-vous pour K_2 ?

Exercice 3 - suite

Nous devons donc déterminer des ensembles réalisables.

Remarquons tout d'abord que comme $y_2 \geq 0$ et $y_2 \leq x_2$, nous devons avoir $x_2 \geq 0$.

Utilisons la contrainte

$$y_1 - y_2 \leq 2 - \xi x_1.$$

Comme $y_2 \leq x_2$, nous avons $y_1 \leq 2 - \xi x_1 + x_2$, et tout y_1 satisfaisant cette inégalité conviendra. Le problème est donc réalisable si et seulement si $2 - \xi x_1 + x_2 \geq 0$.

Il suit que

$$\begin{aligned} K_2(\xi) &= \{x = (x_1, x_2)^T \mid x_2 \geq 0, \xi x_1 \leq 2 + x_2\} \\ &= \{x = (x_1, x_2)^T \mid x_2 \geq \max(0, \xi x_1 - 2)\}. \end{aligned}$$

Exercice 3 - Suite

Pour les distributions considérées, $E[\xi]$ et $E[\xi^2]$ existent et sont finies. Il suit que

$$K_2 = K_2^P = \bigcap_{\xi \in \Xi} K_2(\xi).$$

Si $\xi \sim U[0, 1]$, $\xi \leq 1$, et $\xi x_1 \leq 2 + x_2$ si $x_1 \leq 2 + x_2$. Autrement dit, $K_2(\xi) \subseteq K_2(1)$, et

$$K_2 = \{x \mid x_2 \geq 0, x_1 \leq 2 + x_2\}.$$

Si $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $\xi = 0, 1, \dots$, de sorte que ξx_1 n'est pas borné supérieurement, sauf si $x_1 \leq 0$. Dès lors,

$$K_2 = \{x \mid x_1 \leq 0, x_2 \geq 0\}.$$

Interprétation. Toute décision de première étape doit satisfaire $x_1, x_2 \geq 0$, par conséquent, si $\xi \sim U[0, 1]$,

$$K_1 \cap K_2 \subseteq \{x \mid x_1, x_2 \geq 0, x_1 \leq 2 + x_2\},$$

et si $\xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$,

$$K_1 \cap K_2 \subseteq \{x \mid x_1 = 0, x_2 \geq 0\}.$$

Nous pouvons espérer un recours relativement complet dans le premier cas (cela dépend de K_1), mais le deuxième se présente assez mal !