

Corrigé de l'examen Intra

Fabian Bastin

IFT-6512 – Hiver 2011

On considère le problème suivant:

$$\min_x x_1 + 4x_2 + E_\xi[Q(x, \xi)]$$

$$\text{t.q. } x_1 + x_2 = 1,$$

$$x \geq 0,$$

et

$$Q(x, \xi) = \min_y y_1 + 10y_2 + 10y_3$$

$$\text{t.q. } y_1 + y_2 - y_3 = \xi + x_1 - 2x_2,$$

$$y_1 \leq 2,$$

$$y \geq 0,$$

où $x = (x_1 \ x_2)^T$, $y = (y_1 \ y_2 \ y_3)^T$, $\xi \sim U[1, 3]$.

Question 1

*Le recours est-il fixe, simple, complet, relativement complet?
Justifiez!*

W (dont la forme exacte reste à préciser. . .) ne dépend pas de ξ , aussi le recours est fixe. Il n'est cependant pas simple vu que nous ne pouvons écrire W sous

$$W = (I \quad -I),$$

Le recours est relativement complet, puisque la solution optimale de deuxième étape $y^*(x, \xi)$ existe quel que soit x , pour ξ fixé (et donc le problème est a fortiori réalisable quel que soit x). Autrement dit $K_2(\xi) = \mathbb{R}^n$ et $K_2 = K_2^P = \bigcap_{\xi \in \Xi} K_2(\xi) = \mathbb{R}^n$ (car le recours est fixe).

Question 1

Pour savoir si le recours est complet, nous devons étudier la matrice W : il faut que $\{z \mid \exists y \in \mathbb{R}^2, Wy = z, y \geq 0\} = \mathbb{R}^2$.

Nous devons d'abord mettre le problème sous forme standard:

$$y_1 + y_2 = y_3 = z_1,$$

$$y_1 + s = z_2,$$

où s est une variable standard, $s \geq 0$.

Si $z_2 < 0$, on ne peut satisfaire la deuxième contrainte, donc le recours n'est pas complet!

Remarquons cependant au passage que le cas $z_2 < 0$ ne pourra jamais arriver dans le problème tel que défini, vu que la contrainte est $0 \leq y_1 \leq 2$.

Question 1

Pour x et ξ donnés, on peut montrer (en utilisant les conditions KKT) que

$$y^*(x, \xi) = \begin{cases} y_1 = \xi + x_1 - 2x_2, y_2 = y_3 = 0 & \text{si } 0 \leq \xi + x_1 - 2x_2 \leq 2, \\ y_1 = 2, y_2 = \xi + x_1 - 2x_2 - 2 & \text{si } \xi + x_1 - 2x_2 > 2, \\ y_3 = 2x_2 - \xi - x_1 & \text{si } \xi + x_1 - 2x_2 < 0. \end{cases}$$

Quelle(s) propriété(s) attendue(s) sur $Q(x, \xi)$ est(sont) vérifiée(s) en observant la valeur $y^*(x, \xi)$?

Question 1

Quelle propriété attendue sur $Q(x, \xi)$ est vérifiée en observant la valeur $y^(x, \xi)$?*

$Q(x, \xi)$ est linéaire par morceaux, et convexe.

$Q(x) \stackrel{\text{def}}{=} E_{\xi}[Q(x, \xi)]$ est-elle différentiable? Pourquoi?

Oui, car la variable aléatoire ξ est continue et de moment d'ordre 2 fini, et le recours est fixe.

Question 1

Exprimez K_1 , $K_2(\xi)$, K_2^P , K_2 .

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0, x_1 + x_2 = 1\}.$$

$$K_2(\xi) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid Q(x, \xi) < \infty\}.$$

De (b), on voit que quels que soient ξ et x , on a une solution optimale finie, donc $K_2(\xi) = \mathbb{R}^2$.

Comme le recours est fixe, $K_2 = K_2^P = \bigcap_{\xi \in \Xi} K_2(\xi) = \mathbb{R}^2$.

Question 2

Considérons l'approche par pénalisation de la longueur de pas introduite par A. Ruszczyński. Pourquoi introduire une telle pénalisation? Quels en sont les avantages et inconvénients? La pénalisation proposée par Ruszczyński consiste à ajouter un terme quadratique:

$$\min_x c^T x + \sum_{j \in C} \theta_j + \frac{1}{2\rho} \|x - x_k\|^2.$$

La pénalisation réduit la longueur de pas admissible d'un itéré au suivant, ce qui est utile en particulier au cours des premières itérations de la méthode *L-shaped*, comme peu de coupe ont été ajoutées et la résolution du programme prend principalement en compte la première étape, mais pas la seconde.

Question 2

Ce faisant, on peut être conduit à obtenir une solution assez mauvaise par rapport au problème stochastique complet, et ce même si nous partions d'un bon estimé de la solution. Dans ce cas, il peut être avantageux d'éviter de s'éloigner trop de cet estimé initial.

La détermination du paramètre p reste toutefois délicate, comme un p trop petit mènera à une trop forte pénalisation des déplacements admissibles, et donc une convergence lente, et un p trop grand risque de ne donner aucune pénalisation en pratique, de sorte que nous resterions proche du cadre L -shaped original.

Enfin, et peut-être le plus important, la pénalité conduit à un problème (convexe) nonlinéaire, plus difficile à résoudre, et moins adapté à des solveurs linéaires comme CPLEX.

Question 3

Montrez que $E_{\xi}[\min_x z(x, \xi)] \leq \min_x E_{\xi}[z(x, \xi)]$.

Comment interpréter ce résultat par rapport à la programmation stochastique?

Soit x^* la solution de $\min_x E_{\xi}[z(x, \xi)]$. Nous avons $\min_x z(x, \xi) \leq z(x^*, \xi)$, quel que soit la réalisation ξ . Nous obtenons le résultat voulu en passant à l'espérance.

Question 3

Dans un schéma Wait-and-See, nous attendons de connaître la réalisation ξ avant de prendre la décision, mais ce faisant, nous pouvons exploiter d'avantage d'information. La solution stochastique est elle nonanticipative, et si elle bonne en moyenne, elle sera moins intéressante pour une réalisation particulière. On retrouve la notion d'EVPI (Expected Value of Perfect Information), avec $EVPI = \min_x E_\xi[z(x, \xi)] - E_\xi[\min_x z(x, \xi)]$, qui nous donne le gain espéré si nous étions en mesure de lever l'incertitude avant de prendre une décision.

Question 4

Lors de la résolution d'un problème à deux étapes avec la méthode *L-Shaped*, nous avons obtenu des coupes de faisabilité. Peut-on affirmer que le problème a un recours relativement complet?

Un recours relativement complet signifie que toute solution réalisable en première étape devrait conduire à un problème réalisable en deuxième étape. Or, nous ne pouvons générer une coupe de faisabilité que lorsque le problème de seconde étape n'est pas réalisable pour la solution obtenue en résolvant le problème de première étape, avec possiblement diverses coupes ajoutées. Cette solution étant réalisable pour la première étape, nous ne pouvons donc avoir un recours relativement complet.

Question 5

Lors de la génération de coupes d'optimalité, est-il préférable d'employer une approche à simple coupe ou multi-coupes? Justifiez.

Il n'y a pas de réponse tranchée à cette question, comme la performance d'une approche par rapport à une autre dépend du modèle considéré. Toutefois, la version multi-coupes utilisant d'avantage d'information à chaque itération, on peut espérer recouvrir plus rapidement la forme de la seconde étape et donc faire moins d'itérations qu'avec une approche simple coupe. Le problème maître construit avec une approche multi-coupes tend néanmoins à être plus coûteux à résoudre. Une règle pratique est de considérer que l'approche multi-coupes est plus efficace quand le nombre de réalisations n'est pas significativement plus grand que le nombre de contraintes de première étape. On pourra aussi dans ce cas adopter une approche intermédiaire, en groupant les scénarios en clusters, et en créant les coupes cluster par cluster.

Question 6

Considérons un problème de production, où nous devons décider des quantités à produire avant de connaître la demande. En deuxième étape, nous avons deux réalisations possibles de la demande:

- une demande de 500 avec une probabilité de 0.6;
- une demande de 700 avec une probabilité de 0.4.

Après cette réalisation, nous faisons une décision sur la décision pour rencontrer la demande à l'étape suivant (troisième étape). Si la demande est de 500 en deuxième étape, elle sera en troisième étape de 600 avec une probabilité 0.3, et de 700 avec une probabilité 0.7. Si elle est de 700 en deuxième étape, elle vaudra 900 en troisième étape avec une probabilité de 0.2, et 800 avec une probabilité 0.8.

Question 6

La production d'une unité coûte 2\$, et nous devons satisfaire la demande à chaque étape. Si elle n'est pas satisfaite, nous pouvons compléter la production en achetant des biens au prix de 3\$ l'unité.

Dessinez l'arbre de scénarios et écrivez le problème stochastique correspondant, en utilisant une approche nodale (i.e. une variable, ou un vecteur de variables), par noeud. Faites de même avec une approche par scénarios.

Notons x_{ij} la décision de production à l'étape i pour le noeud j ,
et y_{ij} la décision d'achat à l'étape i pour le noeud j

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_{11} + 0.6(2x_{21} + 3y_{21} + 3(0.3y_{31} + 0.7y_{32})) \\ & + 0.4(2x_{22} + 3y_{22} + 3(0.2y_{33} + 0.8y_{34})) \end{aligned}$$

$$\text{t.q. } x_{11} + y_{21} \geq 500,$$

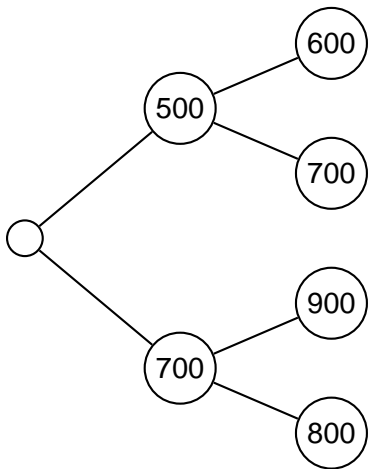
$$x_{11} + y_{22} \geq 700,$$

$$x_{11} + y_{21} - 500 + x_{21} + y_{31} \geq 600,$$

$$x_{11} + y_{21} - 500 + x_{21} + y_{32} \geq 700,$$

$$x_{11} + y_{22} - 700 + x_{22} + y_{33} \geq 900,$$

$$x_{11} + y_{22} - 700 + x_{22} + y_{34} \geq 800,$$



Comme les variables aléatoires sont supposées indépendantes entre les étapes, nous avons 4 scénarios, de probabilité respective $0.6 \cdot 0.3 = 0.18$, $0.6 \cdot 0.7 = 0.42$, $0.4 \cdot 0.2 = 0.08$, $0.4 \cdot 0.8 = 0.32$.

Notons x_{ij} la décision de production à l'étape i pour le scénario j , et y_{ij} la décision d'achat à l'étape i pour le scénario j

Formulation par scénarios

$$\begin{aligned} \min & 0.18 (2x_{11} + 2x_{21} + 3y_{21} + 3y_{31}) \\ & + 0.42 (2x_{12} + 2x_{22} + 3y_{22} + 3y_{32}) \\ & + 0.08 (2x_{13} + 2x_{23} + 3y_{22} + 3y_{32}) \\ & + 0.32 (2x_{14} + 2x_{24} + 3y_{22} + 3y_{32}) \\ \text{t.q.} & x_{1s} + y_{2s} \geq 500, \quad s = 1, 2, \\ & x_{1s} + y_{2s} \geq 700, \quad s = 3, 4, \\ & x_{11} + y_{21} - 500 + x_{21} + y_{31} \geq 600, \\ & x_{12} + y_{22} - 500 + x_{22} + y_{32} \geq 700, \\ & x_{13} + y_{23} - 700 + x_{23} + y_{33} \geq 900, \\ & x_{14} + y_{24} - 700 + x_{24} + y_{34} \geq 800, \\ & x_{11} = x_{12} = x_{13} = x_{14}, \\ & x_{21} = x_{22}, \quad y_{21} = y_{22}, \\ & x_{23} = x_{24}, \quad y_{23} = y_{24}. \end{aligned}$$

