

# Programmation stochastique

## Méthodes basées sur le lagrangien du programme stochastique

Fabian Bastin

IFT-6512 – Hiver 2011

**Référence** : Birge et Louveaux, Sections 3.4 et 6.3.

Nous considérons à présent le **programme nonlinéaire à 2 étapes** général

$$\begin{aligned} \inf z &= f^1(x) + Q(x) \\ \text{t.q. } g_i^1(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m_1, \end{aligned}$$

où  $Q(x) = E_\xi[Q(x, \xi)]$ , et

$$\begin{aligned} Q(x, \xi) &= \inf f^2(y(\xi), \xi) \\ \text{t.q. } b_i^2(x, \xi) + g_i^2(y(\xi), \xi) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m_2. \end{aligned}$$

Nous supposons que toutes les fonctions  $f^2(\cdot, \xi)$ ,  $b_i^2(\cdot, \xi)$  et  $g_i^2(\cdot, \xi)$  sont continues pour n'importe quel  $\xi$  fixé, et mesurables en  $\xi$  pour n'importe quel premier argument fixé.

Réintroduisons  $K_1$  et  $K_2$ .

$$K_1 = \{x \mid g_i^1(x) \leq 0, i = 1, \dots, m_1\},$$

$$K_2(\xi) = \{x \mid \exists y(\xi) \text{ t.q. } b_i^2(x, \xi) + g_i^2(y(\xi), \xi) \leq 0, i = 1, \dots, m_2\},$$

$$K_2 = \{x \mid Q(x) < \infty\}.$$

## Hypothèses.

- 1 Convexité.** La fonction  $f^1$  est convexe sur  $\mathbb{R}^{n_1}$ ,  $g_i^1$  est convexe sur  $\mathbb{R}^{n_1}$  ( $i = 1, \dots, m_1$ ),  $f^2(\cdot, \xi)$  est convexe sur  $\mathbb{R}^{n_2}$  pour tout  $\xi \in \Xi$ ,  $g_i^2(\cdot, \xi)$  est convexe sur  $\mathbb{R}^{n_2}$  ( $i = 1, \dots, m_2$ ), pour tout  $\xi \in \Xi$ , et  $b_i^2(\cdot, \xi)$  est convexe sur  $\mathbb{R}^{n_1}$  ( $i = 1, \dots, m_2$ ), pour tout  $\xi \in \Xi$ .
- 2 Condition de Slater** Si  $Q(x) < \infty$ , pour presque tout  $\xi \in \Xi$  il existe un certain  $y(\xi)$  t.q.  $b_i^2(x, \xi) + g_i^2(y(\xi), \xi) < 0$  ( $i = 1, \dots, m_2$ ).

La condition de Slater est une condition de **régularité** permettant d'appliquer les conditions KKT.

## Théorème

*Sous les hypothèses 1 et 2, la fonction de recours  $Q(x, \xi)$  est une fonction convexe en  $x$  pour tout  $\xi \in \Xi$ .*

## Théorème

*Si la région réalisable de recours (i.e. en  $y$ , pour  $\xi$  fixé) est bornée pour n'importe quel  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ , alors la fonction  $Q(x, \xi)$  est semi-continue inférieurement en  $x$  pour tout  $\xi \in \Xi$ .*

# Semi-continuité inférieure

Nous disons qu'une fonction  $f$  est **semi-continue inférieurement en  $x_0$**  si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un voisinage  $U$  de  $x_0$  tel que  $f(x) > f(x_0) - \varepsilon$  pour tout  $x \in U$ . De manière équivalente,

$$\liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0),$$

où

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \inf \{ f(x) : x \in \text{dom}(f) \cap B(a; \varepsilon) \setminus \{a\} \}.$$

La fonction  $f$  est dite **semi-continue inférieurement** si elle est semi-continue inférieurement en tout point de son domaine. Une fonction est semi-continue inférieurement si et seulement si  $\{x \in X : f(x) > \alpha\}$  est un ensemble ouvert pour chaque  $\alpha \in \mathbb{R}$ , ou, de manière similaire,  $\{x \in X : f(x) \leq \alpha\}$  est un ensemble fermé pour chaque  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

## Corollaire

*La fonction de recours espéré  $Q(x)$  est une fonction convexe en  $x$ .*

## Corollaire

*L'ensemble réalisable  $K_2 = \{x \mid Q(x) < \infty\}$  est fermé et convexe.*

## Corollaire

*Si la région réalisable de recours est bornée pour n'importe quel  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $Q$  est une fonction semi-continue inférieurement.*

## Théorème

*Si la région réalisable de recours est bornée pour n'importe quel  $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ ,  $K_1$  est borné,  $f^1$  est continue,  $g_i^1$  et  $g_i^2$  continues pour chaque  $i$ , et  $K_1 \cap K_2 \neq \emptyset$ , alors le programme nonlinéaire stochastique à 2 étapes a une solution optimale et l'infimum est atteint.*

## Théorème

*S'il existe un  $x$  tel que  $x \in \text{ri}(\text{dom}(f^1(x)))$ ,  $x \in \text{ri}(\text{dom}(Q(x)))$  et  $g_i^1(x) < 0$  ( $i = 1, \dots, m_1$ ), alors  $x^*$  est optimal si et seulement si  $x^* \in K_1$  et il existe  $\lambda_i^* \geq 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), tels que  $\lambda_i^* g_i^1(x^*) = 0$  ( $i = 1, \dots, m$ ), et*

$$0 \in \partial f^1(x^*) + \partial Q(x^*) + \sum_{i=1}^{m_1} \lambda_i^* \partial g_i^1(x^*).$$

L'intérieur relatif d'un ensemble  $S$  (dénnoté  $ri(S)$ ) est défini comme son intérieur au sein de l'enveloppe affine de  $S$ . En d'autres mots,

$$ri(S) = \{x \in S \mid \exists \varepsilon > 0, (B_\varepsilon(x) \cap \text{aff}(S)) \subseteq S\},$$

où  $\text{aff}(S)$  est l'enveloppe affine de  $S$ , et  $B_\varepsilon(x)$  est une boule de rayon  $\varepsilon$  centrée en  $x$ . N'importe quelle métrique peut être utilisée pour la construction de la boule : toutes définissent le même intérieur relatif.

L'enveloppe affine  $\text{aff}(S)$  de  $S$  est l'ensemble de toutes les combinaisons affines des éléments de  $S$ , c'est-à-dire

$$\text{aff}(S) = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i \mid x_i \in S, \alpha_i \in \mathbb{R}, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, k = 1, 2, \dots \right\}.$$

- Problème : les méthodes non-linéaires classiques supposent que les (sous-)gradients de  $Q$  sont disponibles et relativement peu coûteux à obtenir. Pas le cas ici.
- Lier la première et la seconde étapes afin d'éviter des sous-problèmes d'optimisation lors de la construction de directions de recherche.

Considérons le problème stochastique sous la forme

$$\begin{aligned} \inf z &= f^1(x) + E_{\xi}[f^2(y(\xi), \xi)] \\ \text{s.t. } g_i^1(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m_1, \\ b_i^2(x, \xi) + g_i^2(y(\xi), \xi) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, m_2 \text{ p.s.} \end{aligned}$$

où p.s. signifie presque sûrement.

## Principe de base des approches lagrangiennes (2)

Soit  $(\lambda, \pi)$  un vecteur de multiplicateurs associé aux contraintes. Nous pouvons alors former un problème dual comme suit :

$$\max_{\pi(\xi) \geq 0} w = \theta(\pi),$$

où

$$\theta(\pi) = \inf_{x, y} f^1(x) + E_{\xi}[f^2(y(\xi), \xi)] +$$

$$E_{\xi} \left[ \sum_{i=1}^{m_2} \pi_i(\xi) \left( b_i^2(x, \xi) + g_i^2(y(\xi), \xi) \right) \right]$$

$$\text{s.t. } g_j(x) \leq 0, j = 1, \dots, m_1.$$

On voit qu'on ne considère que le dual basé sur les contraintes de deuxième étape (liant première et deuxième étapes). Nous allons établir la dualité dans le cas d'une distribution finie.

## Théorème

*On suppose que toutes les fonctions du programme stochastique sont convexes, et qu'il possède une valeur optimale finie, ainsi qu'un point satisfaisant toutes les contraintes de manière stricte. Supposons également que le support de  $\xi$  est fini.*

*Alors  $z \geq w$  pour tous  $x, y_1, \dots, y_S$  réalisables dans la formulation primale et  $\pi_1, \dots, \pi_S$  réalisables dans la formulation duale.*

*De plus, leurs valeurs optimales coïncident :  $z^* = w^*$ .*

Nous supposerons donc dans la suite que  $\Xi$  est fini, et nous allons décrire des procédures exploitant la fonction lagrangienne.

# Méthode d'ascension duale lagrangienne basique

Hypothèse : le problème dual a toujours une solution unique.

## Algorithme 1: Méthode d'ascension duale lagrangienne

**Step 0.** Soit  $\pi^0 \geq 0$ ,  $\nu = 0$ .

**Step 1.** Etant donné  $\pi = \pi^\nu$  dans le problème dual, soit la solution  $(x^\nu, y_1^\nu, \dots, y_S^\nu)$ . Pour  $s = 1, \dots, S$ , définissons  $\hat{\pi}_i^s$  comme

$$\hat{\pi}_i^s = \begin{cases} 0 & \text{if } \pi_i^{\nu,s} = 0 \text{ and } b_i^2(x^\nu, s) + g_i^2(y_s^\nu, s) \leq 0, \\ b_i^2(x^\nu, s) + g_i^2(y_s^\nu, s) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si  $\hat{\pi}^s = 0$  pour tout  $s$ , arrêt.

**Step 2.** Soit  $\lambda^\nu$  maximisant  $\theta(\pi^\nu + \lambda \hat{\pi})$  sur  $\pi^\nu + \lambda \hat{\pi} \geq 0$ ,  $\lambda \geq 0$ . Posons  $\pi^{\nu+1} = \pi^\nu + \lambda^\nu \hat{\pi}$ ,  $\nu = \nu + 1$ . Retour à l'étape 1.

- Sous l'hypothèse d'unicité de la solution du programme dual, on peut montrer que cet algorithme produit toujours une **direction d'ascension** en  $\theta$ .
- Soit l'algorithme converge vers une solution optimale, ou, en supposant un ensemble borné d'optima, produit une séquence infinie dont tous les points limites sont optimaux.
- Bonnes performances si le nombre d'itérations duales est petit comparé aux nombres d'évaluations de fonction qui serait requis en attaquant directement le programme original.
- Résoudre le programme dual peut être coûteux en temps, mais devrait néanmoins être plus facile que résoudre directement le programme original vu que les contraintes de liaisons entre les deux étapes (i.e. impliquant  $x$  et  $y(\xi)$ ) apparaissent maintenant dans l'objectif.

## Deuxième essai : scénarios

Puisque  $\Xi$  est fini, nous pouvons considérer que  $S$  scénarios existent, et nous pouvons lier une décision non-anticipative  $\hat{x}$  et les décisions du scénario  $s$  avec les termes  $(\hat{x} - x_k)$  termes dans la fonction objectif.

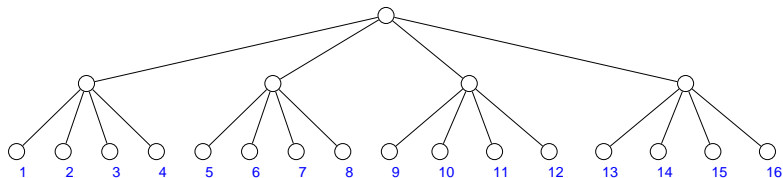
Considérons le problème général

$$\inf_{x \in \mathcal{N}} E \left[ \sum_{t=0}^T f_{t+1}(\xi, x^t(\xi), x_{t+1}(\xi)) \right],$$

t.q.  $x_t(\xi) \in X_t(\xi)$  p.s.,

où  $x_t$  est la décision à l'étape  $t$ , et  $x^t$  est l'historique des décisions à l'étape  $t$ , i.e.  $x^t = \{x_1, \dots, x_t\}$ .  $\mathcal{N}$  désigne le sous-espace linéaire fermé des processus nonanticipatifs. Notant  $\mathcal{A}$  le  $\sigma$ -champ de tous les événements (i.e. la collection des sous-ensembles d'événements, avec la mesure de probabilité associée à  $\xi$ ).

Conceptuellement, la séquence d'événements aléatoires peut être arrangée en arbre. Il y a autant de feuilles que de scénarios.



Les scénarios ne sont pas forcément équiprobables, les variables aléatoires peuvent être corrélées,...

- La conversion entre le modèle déterministe et la version stochastique est facile. . .
- mais le modèle ainsi construit est faux !!!
- Nous devons garantir la **nonanticipativité** :
  - nous ne pouvons pas autoriser des décisions différentes entre scénarios quand ils partagent une histoire commune ;
  - nous ne pouvons pas anticiper les réalisations futures en faisant notre décision maintenant ;
  - cf arbre de scénarios : on peut affecter un vecteur de décisions à chaque noeud de l'arbre. A l'exception des feuilles, ces noeuds sont partagés par plusieurs scénarios.

Formalisons. . .

Soit  $S_s^t$  l'ensemble des scénarios qui sont identiques au scénario  $s$  au temps  $t$ . Nous devons garantir que

$$x_{its} = x_{its'}, \forall i \in N, \forall t \in T, \forall s \in S, \forall s' \in S_s^t.$$

- Il y a plus d'une manière d'écrire les conditions de nonanticipativité.
- Proposition de Birge :

$$\left( \sum_{s' \in \mathcal{S}_s^t} p'_s \right) x_{its} = \sum_{s' \in \mathcal{S}_s^t} p'_s x_{its'} \quad \forall i, t, s.$$

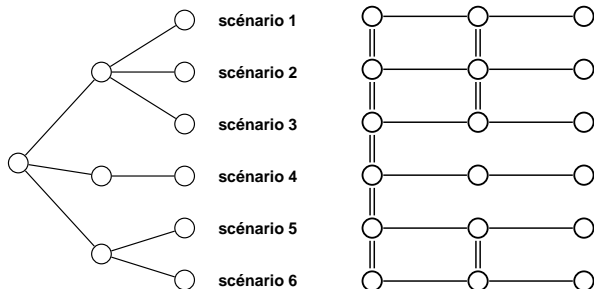
Le montant investi dans le scénario  $s$  multiplié par la probabilité d'atteindre un scénario équivalent à  $s$  doit être égal au montant espéré qui serait investi dans tous les scénarios équivalent à  $s$ .

- Il y en encore d'autres formulations. . . la meilleure dépend de l'application et de l'algorithme de résolution. Nous introduirons ces formulations en temps utile.

# Revenons à l'arbre de scénarios

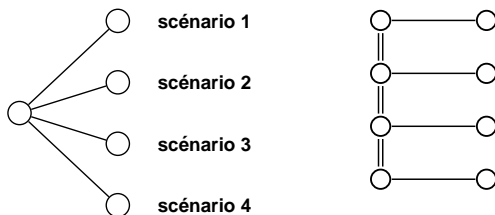
- Nous avons dû forcer la nonanticipativité car avec la manière de procéder que nous venons de présenter, nous avons en fait créé des copies des variables pour chaque scénario à chaque période.

Graphiquement :



- Créons un vecteur de variables pour chaque noeud dans l'arbre.
- Ce vecteur correspond à ce que devrait être notre décision étant données les réalisations connues des variables aléatoires à cette période i.e. à ce point dans l'arbre.
- Indiquons les noeuds  $l = 1, 2, \dots, \mathcal{L}$ .
- Nous devons connaître le parent de chaque noeud. Soit  $A(l)$  l'ancestre du noeud  $l \in \mathcal{L}$  dans l'arbre de scénarios.
- Besoin de rappels de théorie des graphes ?

# Nonanticipativité : 2 étapes



Mathématiquement,

- la nonanticipativité revient à exiger que  $x^t(\xi)$  doit être  $\mathcal{A}^t$ -mesurable, où  $\mathcal{A}^t$  est le  $\sigma$ -champ des événements jusqu'au temps  $t$  ;
- ou encore,  $x^t(\xi) = E[x^t(\xi) | \mathcal{A}^t]$  p.s.,  $t = 0, \dots$  ;
- en utilisant l'opérateur de projection  $\Pi^t : z \rightarrow \Pi^t z := E[z | \mathcal{A}^t]$ , ceci est équivalent à

$$(I - \Pi^t)x^T = 0, \quad t = 0, \dots$$

# Nonanticipativité (suite)

Plus simplement, et comme vu dans lors de l'introduction, soit  $S_s^t$  l'ensemble des scénarios qui sont identiques au scénario  $s$  au temps  $t$ . Nous devons garantir que

$$x_{its} = x_{its'}, \forall i \in N, \forall t \in T, \forall s \in S, \forall s' \in S_s^t.$$

Autrement dit, les scénarios possèdent des décisions identiques tant que leurs histoires se confondent, i.e. que les réalisations observées à une étape donnée coïncident, et des décisions possiblement différentes dès qu'ils ne sont plus identiques, i.e. à partir de l'étape où les réalisations observées ne sont plus les mêmes.

**Idée** : inclure explicitement les contraintes de nonanticipativité, et les placer dans la fonction objectif plutôt que dans les contraintes de seconde étape.

# Ascension duale et scénarios

Nous considérons à présent la maximisation du dual pris sur les contraintes de nonanticipativité :

$$\max_{\pi(\xi) \geq 0} w = \theta(\pi),$$

où

$$\theta(\pi) = \inf_{x \in \mathcal{X}} z = E \left[ \sum_{t=0}^T f_{t+1}(\xi, x^t(\xi), x_{t+1}(\xi)) \right] + E \left[ \sum_{t=0}^T \pi^t(\xi) (I - \Pi_t) x^t(\xi) \right],$$

où  $\pi^t$  correspond aux composantes de  $\pi$  associées au  $t$  premières périodes.

# Ascension duale et scénarios : deux étapes

Il reste à décrire l'opérateur de projection. Pour la facilité, considérons 2 étapes. Le problème primal devient (en omettant les contraintes autres que la nonanticipativité) :

$$\begin{aligned} \min z &= \sum_{s=1}^S \rho_s (f^1(x_s) + f^2(x_s, y_s)) \\ \text{t.q. } x_k &- \sum_{s=1}^S \rho_s x_s = 0, \quad s = 1, \dots, S. \end{aligned}$$

Le problème dual s'écrit à présent :

$$\begin{aligned} \max_{\pi} \theta(\pi) &= \min_{x, y} \sum_{s=1}^S \rho_s \left( f^1(x_s) + f^2(x_s, y_s) \right. \\ &\quad \left. + \pi_s \left( x_s - \sum_{s=1}^S \rho_s x_s \right) \right). \end{aligned}$$

## Algorithme 2: Méthode d'ascension duale lagrangienne

**Step 0.** Soit  $\pi^0 \geq 0$ ,  $\nu = 0$ .

**Step 1.** Etant donné  $\pi = \pi^\nu$  dans le problème dual, calculer la solution  $(x_s^\nu, \dots, x_s^\nu, y_1^\nu, \dots, y_S^\nu)$ .

**Step 2.** Si  $x_s = \sum_{k=1}^S p_k x_k = 0$ ,  $s = 1, \dots, S$ , arrêt : la solution est optimale.

Sinon, définir  $\hat{\pi}_s = x_s - \sum_{k=1}^S p_k x_k$ , et aller à l'étape 3.

**Step 3.** Soit  $\lambda^\nu$  maximisant  $\theta(\pi^\nu + \lambda \hat{\pi})$  sur  $\pi^\nu + \lambda \hat{\pi} \geq 0$ ,  $\lambda \geq 0$ . Posons  $\pi^{\nu+1} = \pi^\nu + \lambda^\nu \hat{\pi}$ ,  $\nu = \nu + 1$ . Retour à l'étape 1.

# Lagrangien augmenté

Hélas, ce type de procédure est généralement lente car il n'y a qu'une linéarisation en un seul point de  $\theta$ . Elle est néanmoins assez facile à implanter et peut donner de bon résultats, surtout pour des problèmes de petite taille.

Pour améliorer les performances, on va se tourner vers une autre technique inspirée de l'optimisation nonlinéaire classique : les approches de **lagrangien augmenté**.

L'idée de base dans une procédure de Lagrangien augmenté est d'ajouter une pénalité sur  $\theta(\pi)$  et de construire les itérations en incluant ce terme.

De plus, avec des techniques de Lagrangien augmenté, nous pourrons espérer utiliser la structure du problème afin de décomposer le problème.

Nouveau détour par la **programmation nonlinéaire**.

Considérons le problème d'optimisation avec les contraintes d'égalité

$$\begin{aligned} \min_x f(x) \\ \text{t.q. } c_i(x) = 0, \quad i \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

L'idée est d'inclure les contraintes d'égalité dans un terme de pénalité qui mesure la violation des contraintes et qui est ajouté à l'objectif.

Le terme de pénalisation est non-nul quand  $x$  est non-réalisable par rapport aux contraintes. Pour cette raison, de telles approches sont aussi connues comme méthodes de pénalisation extérieures.

# Méthodes de pénalisation

La méthode de pénalité quadratique utilise

$$P(x; \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i^2(x)$$

comme terme de pénalisation, où le paramètre de pénalisation est donné par  $\rho = \frac{1}{2\mu} > 0$ . A l'itération  $k$ , nous minimisons la fonction

$$f(x_k) + P(x_k; \mu_k),$$

où  $\mu_k$  est construit de telle manière que  $\mu_k \rightarrow 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ .

Quand des contraintes d'inégalité sont présentes (de type  $c_i(x) \geq 0$ ), la fonction de pénalisation quadratique est augmentée d'un terme reflétant leur violation et devient

$$P(x; \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i^2(x) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in \mathcal{I}} (\max\{-c_i(x), 0\})^2.$$

## Méthodes de pénalisation (2)

Ajouter de tels termes peut cependant conduire à une fonction de pénalité moins douce, ce qui bien sûr est moins attrayant dans le cadre d'une minimisation. Plus généralement, un inconvénient majeur des méthodes de pénalisation est que le hessien  $\nabla_{xx}^2 P(x; \mu)$  devient généralement mal conditionné près du minimiseur de  $P(x; \mu)$  quand  $\mu \rightarrow 0$ .

Un autre type de terme de pénalisation est donné par

$$P(x; \mu) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{\mu} \sum_{i \in \mathcal{I}} \max\{0, -c_i(x)\} + \frac{1}{\mu} \sum_{i \in \mathcal{E}} |c_i(x)|.$$

# Méthodes de pénalisation (3)

On peut montrer que  $\phi(x; \mu) \stackrel{\text{def}}{=} f(x) + P(x; \mu)$ , appelé la **fonction de mérite exacte  $\ell_1$** , satisfait la définition suivante.

## Définition (Fonction de mérite exacte)

*Une fonction de mérite  $\psi(x; \mu)$  est dite exacte s'il existe un scalaire positif  $\mu^*$  tel que pour n'importe quel  $\mu \in (0, \mu^*]$ , n'importe quelle solution locale du problème de programmation nonlinéaire est un minimiseur local de  $\psi(x; \mu)$ .*

- Il est cependant difficile en pratique de choisir la valeur adéquate de  $\mu$  avant une itération lors de la résolution de la plupart des problèmes.
- Les fonctions de pénalité exactes sont souvent non-différentiables. Exemple : la dérivée première de la fonction  $\ell_1$  n'est pas définie pour n'importe quel  $x$  tel que  $c_i(x) = 0$  ( $i \in \mathcal{E} \cup \mathcal{I}$ ).

Une manière de diminuer ces difficultés est d'ajouter le terme de pénalisation au lagrangien plutôt qu'à l'objectif, donnant ainsi la fonction du **lagrangien augmenté** :

$$\mathcal{L}_A(\mathbf{x}, \lambda; \mu) \stackrel{\text{def}}{=} f(\mathbf{x}) + \sum_{i \in \mathcal{E}} \lambda_i c_i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\mu} \sum_{i \in \mathcal{E}} c_i^2(\mathbf{x}).$$

Nous allons par conséquent à présent minimiser  $\mathcal{L}_A(\mathbf{x}, \lambda; \mu)$  par rapport à  $\mathbf{x}$ , et utiliser certaines règles de mise à jour des estimés des multiplicateurs de Lagrange, et ce d'itération en itération.

# Lagrangien augmenté et programmation stochastique

Nous développerons à nouveau les idées dans le contexte à deux étapes. L'approche se généralise néanmoins facilement au cas multi-étapes.

Rappelons que nous cherchons à résoudre

$$\max_{\pi(\xi) \geq 0} w = \theta(\pi),$$

où

$$\theta(\pi) = \inf_{\mathbf{x} \in \mathcal{X}} z = E \left[ \sum_{t=0}^T f_{t+1}(\xi, \mathbf{x}^t(\xi), \mathbf{x}_{t+1}(\xi)) \right] \\ + E \left[ \sum_{t=0}^T \pi^t(\xi) (I - \Pi_t) \mathbf{x}^t(\xi) \right],$$

Pénalisant les contraintes de nonanticipativité, nous obtenons le programme ci-après, où  $\hat{\mathbf{x}}$  est nonanticipatif.



$$\theta(\rho) = \inf z = f^1(\hat{x}) + \sum_{s=1}^S \left( p_s f^2(y_s, \xi_s) + \rho_s^T (x_s - \hat{x}) + \frac{r}{2} \|x_s - \hat{x}\|^2 \right)$$

s.t.  $g_i^1(\hat{x}) \leq 0, i = 1, \dots, m_1,$

$t_i^2(x_s, \xi_s) + g_i^2(y_s, \xi_s) \leq 0, i = 1, \dots, m_2, s = 1, \dots, S.$

$r$  est le paramètre de pénalisation de la méthode du lagrangien augmenté, et  $\rho_s$  est le vecteur des variables duales associées aux contraintes de nonanticipativité du scénario  $s$ .

La méthode que nous allons développer vise à présenter à contracter la paire  $(\hat{x}^{\nu+1}, \rho^{\nu+1})$  autour d'un point selle.

Un exemple numérique est fourni dans Birge et Louveaux, à la fin de la section 3.

- Nom original : **progressive hedging**. Référence : R. T. Rockafellar and R. J.-B. Wets, *Scenarios and policy aggregation in optimization under uncertainty*, *Mathematics of Operations Research* 16(1) :119–147 (1991).  
Cet article discute aussi de la version multi-étapes.
- La méthode réalise une séparation complète des problèmes scénario par scénario, à chaque itération, ce qui réduit le coût par itération.
- Le nombre d'itérations peut cependant augmenter. . .
- Mais pour les problèmes structurés, il est possible d'exploiter du parallélisme, et dès lors de résoudre de grands problèmes.
- **Observation** : la fonction lagrangienne ne se sépare pas en scénarios indépendants en raison du terme  $(\hat{X} - x_S)$ .

# Progressing hedging : principe de base

Alternativement,

- 1 fixer  $\hat{x}$  et obtenir les solutions  $x_s$ ,  $s = 1, \dots, S$ ,
- 2 fixer les  $x_s$ ,  $s = 1, \dots, S$ , et calculer  $\hat{x}$ .

Autrement dit, on travaille scénario par scénario, et on impose progressivement les contraintes de nonanticipativité.

A l'itération  $\nu$ , rappelons que nous aurons à résoudre le sous-problème

$$\inf z = \sum_{k=1}^S p_s \left( f^1(x_s) + f^2(y_s, \xi_s) + (\rho_s^\nu)^T (x_s - \hat{x}^\nu) + \frac{r}{2} \|x_s - \hat{x}^\nu\|^2 \right)$$

t.q.  $g_i^1(x_s) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m_1$ ,  $s = 1, \dots, S$ ,

$t_i^2(x_s, k) + g_i^2(y_s, \xi_s) \leq 0$ ,  $i = 1, \dots, m_2$ ,  $s = 1, \dots, S$ .

$\hat{x}^\nu$  n'est pas forcément une solution réalisable !

Le problème se décompose toutefois à présent facilement !  
Algorithme progressive hedging :

**Etape 0.** Supposons que nous avons une solution nonanticipative  $x^0$ , un vecteur de multiplicateurs initial  $\rho^0$ , et  $r > 0$ .  $\nu \leftarrow 0$ . Aller à l'étape 1.

**Etape 1.** Soit  $(x_s^{\nu+1}, y_s^{\nu+1})$ , une solution du programme lagrangien précédent, pour  $s = 1, \dots, S$ . Posons

$$\hat{x}^{\nu+1} = \left( \hat{x}_1^{\nu+1}, \dots, \hat{x}_S^{\nu+1} \right)^T,$$

$$\text{où } \hat{x}_s^{\nu+1} = \sum_{s=1}^S p_s x_s^{\nu+1}, \quad s = 1, \dots, S.$$

# Décomposition (2)

Etape 2. Posons  $\rho_s^{\nu+1} = \rho_s^\nu + r (x_s^{\nu+1} - \hat{x}_s^{\nu+1})$ ,  
 $s = 1, \dots, S$ . Si  $\hat{x}^{\nu+1} = \hat{x}^\nu$  et  $\rho^{\nu+1} = \rho^\nu$ , arrêt :  
 $(\hat{x}^\nu, \rho^\nu)$  est optimal.  
Sinon, posons  $\nu = \nu + 1$  et retour à l'étape 1.

- L'étape 2 consiste simplement à prendre la valeur espérée de  $x^{\nu+1}$  comme  $\hat{x}^{\nu+1}$ .
- La base de cette approche est dès lors la contraction de la paire  $(\hat{x}^\nu, \rho^\nu)$  autour d'un point optimal plutôt qu'une stratégie d'ascension duale.
- En pratique, le test d'optimalité est remplacé par un test de convergence, par exemple arrêt si la quantité suivante est assez petite (De Silva et Abramson) :

$$\sqrt{\|\hat{x}^\nu - \hat{x}^{\nu+1}\|^2 + \sum_{s=1}^S \rho_s \|x_s^\nu - \hat{x}^\nu\|^2}.$$

On peut montrer que

## Théorème

*Supposons que le programme nonlinéaire stochastique initial a uniquement des fonctions convexes et une valeur optimale finie, ainsi qu'un point strictement admissible. Supposons de plus que le support de  $\xi$  est fini. L'algorithme progressive hedging converge vers une solution optimale  $x^*, \rho^*$ .*

- De Silva et Abramson ont testé l'algorithme progressive hedging pour des problèmes linéaires en gestion de porte-feuilles, proposé par Mulvey et Vladimirou.
- Les sous-problèmes étaient résolus au moyen de méthodes de points intérieurs.
- Bonne accélération de convergence, mais l'algorithme reste sensible au choix du paramètre de pénalisation.