

# Programmation stochastique

## Problèmes multi-étapes

Fabian Bastin

IFT-6512 – Hiver 2011

- Jouons en bourse. En  $Y$  années, nous souhaiterions atteindre un objectif nominal  $G$ .
- Le porte-feuilles est rééquilibré toutes les  $v$  années, de sorte qu'il y a  $T = Y/v$  temps auquel nous devons décider des investissements à faire.  
Il y a  $T$  périodes dans notre problème.
- Nous faisons face à un univers de  $N$  décisions d'investissement ( $N$  types d'actions); nous avons un ensemble  $\mathcal{T} = \{1, 2, \dots, T\}$  périodes d'investissement.
- Si nous dépassons l'objectif  $G$ , nous aurons un taux d'intérêt  $q$  sur le solde.
- Si nous ne rencontrons pas cet objectif, nous devons emprunter à un taux  $r$  pour l'atteindre.
- La mise de départ est  $b$ .

- $x_{it}$ ,  $i \in N$ ,  $t \in \mathcal{T}$  : montant d'argent à investir dans l'action  $i$  au cours de la période  $t$  ;
- $y$  : excès d'argent à la fin de l'horizon ;
- $w$  : manque d'argent à la fin de l'horizon.
- Dans le cadre présent, nous cherchons à prendre les actions correctives pour atteindre le but de  $G$  dollars.

$$\begin{aligned} & \max \quad qy - rw \\ & \text{s.t.} \quad \sum_{i \in N} x_{i1} = b, \\ & \quad \sum_{i \in N} \omega_{it} x_{i,t-1} = \sum_{i \in N} x_{it}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \setminus 1, \\ & \quad \sum_{i \in N} \omega_{iT} x_{iT} - y + w = G, \\ & \quad x_{it} \geq 0, \quad \forall i \in N, t \in \mathcal{T}, \\ & \quad y, w \geq 0. \end{aligned}$$

# Retours aléatoires

- Les retours sur investissements peuvent être considérés comme des variables aléatoires, dont on ignore les réalisations.
- Imaginons que pour chaque action, à chaque temps  $t$ , il y a un nombre potentiel de réalisations donné par  $R$ .
- Les scénarios sont constitués de toutes les séquences possibles de réalisations.

Exemple : supposons que  $R = 4$  et  $T = 3$ . Scénarios :

$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
1	1	1
1	1	2
1	1	3
1	1	4
1	2	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
4	4	4

# Passage à la version stochastique

- Définissons  $x_{its}$ ,  $t \in \mathcal{T}$ ,  $s \in \mathcal{S}$  : montant à investir dans l'action  $i$  au cours de la période  $t$  dans le scénario  $s$  ;
- $y_s$  : montant en excès à la fin de l'horizon dans le scénario  $s$  ;
- $w_s$  : montant manquant à la fin de l'horizon dans le scénario  $s$ .
- Dénотons le retour (aléatoire)  $\omega_{it}$  comme fonction du scénario  $s$ .

$$\max \sum_{s=1}^S p_s(qy_s - rw_s)$$

$$\text{s.t. } \sum_{i \in N} x_{i1} = b,$$

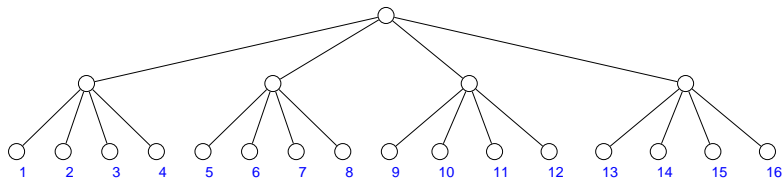
$$\sum_{i \in N} \omega_{it_s} x_{i,t-1,s} = \sum_{i \in N} x_{its}, \quad \forall t \in \mathcal{T} \setminus 1, \forall s \in \mathcal{S}$$

$$\sum_{i \in N} \omega_{iT_s} x_{iT} - y_s + w_s = G, \quad \forall s \in \mathcal{S},$$

$$x_{its} \geq 0, \quad \forall i \in N, t \in \mathcal{T}, \forall s \in \mathcal{S},$$

$$y_s, w_s \geq 0 \quad \forall s \in \mathcal{S}.$$

Conceptuellement, la séquence d'événements aléatoires peut être arrangée en arbre. Il y a autant de feuilles que de scénarios.



Les scénarios ne sont pas forcément équiprobables, les variables aléatoires peuvent être corrélées,...

# Nonanticipativité

- La conversion entre le modèle déterministe et la version stochastique est facile. . .
- mais le modèle ainsi construit est faux!!!
- Nous devons à nouveau garantir la **nonanticipativité** :

Soit  $S_s^t$  l'ensemble des scénarios qui sont identiques au scénario  $s$  au temps  $t$ . Nous devons garantir que

$$x_{its} = x_{its'}, \quad \forall i \in N, \quad \forall t \in T, \quad \forall s \in S, \quad \forall s' \in S_s^t.$$

De manière équivalente,

$$\left( \sum_{s' \in S_s^t} p'_s \right) x_{its} = \sum_{s' \in S_s^t} p'_s x_{its'} \quad \forall i, t, s.$$

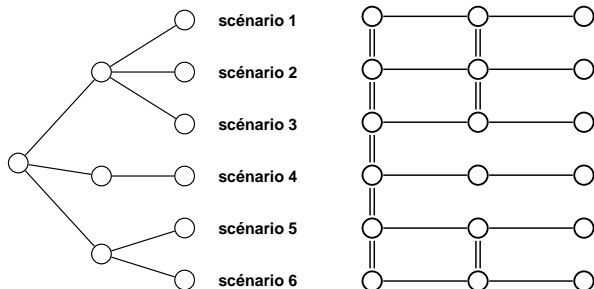
Le montant investi dans le scénario  $s$  multiplié par la probabilité d'atteindre un scénario équivalent à  $s$  doit être égal au montant espéré qui serait investi dans tous les scénarios équivalents à  $s$ .

Il y en a encore d'autres formulations

# Revenons à l'arbre de scénarios

- Nous avons dû forcer la nonanticipativité car avec la manière de procéder que nous venons de présenter, nous avons en fait créé des copies des variables pour chaque scénario à chaque période.

Graphiquement :



- Créons un vecteur de variables pour chaque noeud dans l'arbre.
- Ce vecteur correspond à ce que devrait être notre décision étant données les réalisations connues des variables aléatoires à cette période i.e. à ce point dans l'arbre.
- Indiquons les noeuds  $l = 1, 2, \dots, \mathcal{L}$ .
- Nous devons connaître le parent de chaque noeud. Soit  $A(l)$  l'ancestre du noeud  $l \in \mathcal{L}$  dans l'arbre de scénarios.
- Besoin de rappels de théorie des graphes ?

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_{s \in S} p_s (q y_s - r w_s) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{i \in N} x_{i1} = b, \\ & \sum_{i \in N} \omega_{il} x_{i,A(l)} = \sum_{i \in N} x_{il}, \quad \forall l \in \mathcal{L} \setminus \{1\}, \\ & \sum_{i \in N} w_{iA(s)} x_{iA(s)} - y_s + w_s = G, \quad \forall s \in S, \\ & x_{il} \geq 0, \quad \forall i \in N, \forall l \in \mathcal{L}, \\ & y_s, w_s \geq 0 \quad \forall s \in S. \end{aligned}$$

# Planification de production multi-périodes

- Une usine fabrique plusieurs produits différents.
- Des ressources (par exemple des machines et du travail manuel) sont nécessaires. On suppose que ces exigences sont connues pour chaque produit.
- La demande doit être rencontrée à la fin de chaque période, mais cette demande n'est pas connue avec certitude.
- Des coûts sont induits quand l'inventaire est trop grand ou trop petit, en raison des coûts d'inventaire, stockage, et d'achats pour répondre à la demande.
- Pour satisfaire la demande, il est possible d'ajouter des heures machines et de travail, mais dans une limite donnée.
- Il y a un coût de recrutement et de licenciement associé au changement de la force de travail.

# Problème de décision

- Nous devons décider dès maintenant
  - la quantité de chaque produit à fabriquer au cours de chaque période ;
  - la capacité supplémentaire à utiliser au cours de chaque période ;
  - des recrutements et licenciements à effectuer au cours de chaque période.
- Une demande aléatoire a alors lieu. Conceptuellement, ceci arrive pour toutes les périodes.
- Après avoir observé les demandes aléatoires, nous pouvons décider de comment stocker au mieux des produits dans l'inventaire ou d'en acheter d'une source externe.

## 1 Ensembles :

- $T$  : nombre de périodes, aussi vu comme ensemble ;
- $N$  : ensemble de produits ;
- $M$  : ensemble de ressources.

## 2 Variables :

- $x_{jt}$  : production du produit  $j \in N$  dans la période  $t \in T$  ;
- $u_{it}$  : montant supplémentaire de la ressource  $i \in M$  à acheter au cours de la période  $t \in T$  ;
- $z_{t-1,t}^+$ ,  $z_{t-1,t}^-$  : augmentation, diminution prévue de la force de travail ;
- $y_{j,t}^+$ ,  $y_{j,t}^-$  : surplus, déficit du produit  $j \in N$  à la fin de la période  $t \in T$ .

- Toutes les variables ci-dessus ont des coûts associés  $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ .
- $\omega_{jt}$  : demande du produit  $j \in N$  au cours de la période  $t \in T$ .
- $U_{it}$  : borne supérieure sur  $u_{it}$ .
- $a_{ij}$  : montant de ressource  $i \in M$  nécessaire pour produire une unité du produit  $j \in N$ .
- $b_{it}$  : montant de ressource  $i \in M$  disponible au temps  $t \in T$ .

# Le modèle

$$\min \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \alpha_{jt} x_{jt} + \sum_{i \in M} \sum_{t \in T} \beta_{it} u_{it} + \sum_{t \in T \setminus 1} \left( \gamma_{t-1,t}^+ z_{t-1,t}^+ + \gamma_{t-1,t}^- z_{t-1,t}^- \right) \\ + E_{\omega} \left[ \min \left( \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} (\delta_{jt}^+ y_{jt}^+ + \delta_{jt}^- y_{jt}^-) \right) \right],$$

tel que

$$\sum_{j \in N} a_{ij} x_{jt} \leq b_{it} + u_{it} \quad \forall i \in M, \forall t \in T,$$

$$u_{it} \leq U_{it} \quad \forall i \in M, \forall t \in T,$$

$$z_{t-1,t}^+ - z_{t-1,t}^- = \sum_{j \in N} a_{jt} (x_{jt} - x_{j,t-1}) \quad \forall t \in T \setminus 1,$$

$$x_{jt} + y_{j,t-1}^+ - y_{jt}^+ + y_{jt}^- = \omega_{jt} \quad \forall j \in N, \forall t \in T \text{ (satisfaction demande)}$$

# Le modèle avec recours sous forme étendue

$$\min \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} \alpha_{ij} \mathbf{x}_{jt} + \sum_{i \in M} \sum_{t \in T} \beta_{it} \mathbf{u}_{it} + \sum_{t \in T \setminus 1} \left( \gamma_{t-1,t}^+ \mathbf{z}_{t-1,t}^+ + \gamma_{t-1,t}^- \mathbf{z}_{t-1,t}^- \right) \\ + \sum_{s \in S} \sum_{j \in N} \sum_{t \in T} p_s (\delta_{jt}^+ y_{jts}^+ + \delta_{jt}^- y_{jts}^-),$$

tel que

$$\sum_{j \in N} a_{ij} \mathbf{x}_{jt} \leq b_{it} + \mathbf{u}_{it} \quad \forall i \in M, \forall t \in T,$$

$$\mathbf{u}_{it} \leq U_{it} \quad \forall i \in M, \forall t \in T,$$

$$\mathbf{z}_{t-1,t}^+ - \mathbf{z}_{t-1,t}^- = \sum_{j \in N} a_{jt} (\mathbf{x}_{jt} - \mathbf{x}_{j,t-1}) \quad \forall t \in T \setminus 1,$$

$$\mathbf{x}_{jt} + y_{j,t-1,s}^+ - y_{jts}^+ + y_{jts}^- = \omega_{jts} \quad \forall j \in N, \forall t \in T,$$

contraintes de nonanticipativité.