

Programmation stochastique

Propriétés des modèles avec recours

Fabian Bastin

IFT-6512 – Hiver 2010

Problème stochastique linéaire à 2 étapes, recours fixe

Revenons sur le problème

$$\min c^T x + E_{\xi}[q(\xi)^T y(\xi)]$$

sous les contraintes

$$\begin{aligned} Ax &= b, \\ T(\xi)x + Wy(\xi) &= h(\xi) \quad \forall \xi \in \Xi, \\ x &\in X, \\ y(\xi) &\in Y, \end{aligned}$$

où ξ est un vecteur aléatoire défini sur l'espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , et Ξ est le support de ξ .

Soit

$$Q(x, \xi(\omega)) = \min_{y \in Y} \{q(\omega)^T y : Wy = h(\omega) - T(\omega)x\}.$$

$$\min_{x \in X \mid Ax=b} \left\{ c^T x + E_{\xi} \left[\min_{y \in Y} \{ q(\omega)^T y \mid Wy = h(\xi) - T(\xi)x \} \right] \right\}$$

Fonction de seconde étape, ou fonction de recours

$v : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} :$

$$v(z) \stackrel{\text{def}}{=} \{ q(\omega)^T y \mid Wy = z \}.$$

Etant donné une “politique” x et une réalisation du vecteur aléatoire ξ , si z mesure la déviation de première étape $z = h(\omega) - T(\omega)x$, $v(z)$ est le coût minimum pour “corriger” la décision de manière à satisfaire à nouveau les contraintes.

Fonction de recours

La fonction de valeur espérée, ou la fonction de recours minimum espéré $Q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$:

$$Q \stackrel{\text{def}}{=} E_{\xi}[Q(x, \xi)];$$

pour n'importe quelle politique $x \in \mathbb{R}^n$, elle décrit l'espérance du coût de recours, avec

$$Q(x, \xi) = v(h(\omega) - T(\omega)x).$$

Avec ces définitions, le problème peut se réécrire comme suit :

$$\min_{x \in X} c^T x + Q(x) \text{ tel que } Ax = b.$$

C'est problème de programmation nonlinéaire sur \mathbb{R}^n .

Propriétés ?

Rappel : programmation linéaire (LP : linear programming)

Voir par exemple Section 1.6 de Kall et Wallace, Chapitre 13 de Nocedal et Wright, Section 2.9 Birge et Louveaux.

Considérons le programme linéaire sous la forme standard

$$\begin{aligned} \min_x \quad & c^T x \\ \text{t.q.} \quad & Ax = b, \\ & x \geq 0, \end{aligned}$$

avec $x, c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Supposition : $\text{rang}(A) = m$. Nous supposerons ici que $m < n$.

Programmation linéaire : forme standard

N'importe quel programme linéaire peut être transformé sous forme standard. Considérons par exemple le programme

$$\min_x c^T x \text{ t.q. } Ax \geq b,$$

sans bornes sur x . Nous pouvons le ramener sous la forme standard en introduisant un vecteur de variables de surplus z :

$$\begin{aligned} \min_x c^T x \\ \text{s.t. } Ax - z = b, \\ z \geq 0. \end{aligned}$$

Pour retrouver la contrainte de borne sur x , nous décomposons x en parties positive et négative : $x = x^+ - x^-$, où $x^+ = \max\{x, 0\} \geq 0$, et $x^- = \max\{-x, 0\} \geq 0$.

Programmation linéaire : forme standard (2)

Le problème peut ainsi être réécrit

$$\min_x (c \quad -c \quad 0) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \end{pmatrix},$$
$$\text{t.q. } (A \quad -A \quad -I) \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \end{pmatrix} = b, \begin{pmatrix} x^+ \\ x^- \\ z \end{pmatrix} \geq 0.$$

Les contraintes d'inégalité de la forme $x \leq u$ ou $Ax \leq b$ peuvent être traitées en ajoutant des variables d'écart (slack variables) :

$$x \leq u \equiv x + w = u, \quad w \geq 0,$$
$$Ax \leq b \equiv Ax + y = b, \quad y \geq 0.$$

Optimalité et dualité

L'optimalité peut se déduire des conditions KKT.

En LP, nous n'avons pas besoin d'exiger une qualification de contraintes pour appliquer les conditions KKT.

Lagrangien :

$$\mathcal{L} = c^T x - \pi^T (Ax - b) - s^T x.$$

Conditions KKT : vecteurs de Lagrange π et s t.q.

$$A^T \pi + s = c,$$

$$Ax = b,$$

$$x \geq 0,$$

$$s \geq 0,$$

$$x_i s_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Problème dual

Soit (x^*, π^*, s^*) un vecteur satisfaisant les conditions KKT. On a

$$c^T x^* = (A^T \pi^* + s^*)^T x^* = (Ax^*)^T \pi^* = b^T \pi^*.$$

Il est de plus facile de montrer que les conditions (nécessaires) KKT sont suffisantes.

Problème dual :

$$\max_{\pi} b^T \pi, \text{ t.q. } A^T \pi \leq c.$$

Ecrivons les conditions KKT avec x comme vecteur de Lagrange pour la contrainte $c - A^T \pi \geq 0$. Lagrangien :

$$\bar{\mathcal{L}}(\pi, x) = -b^T \pi - x^T (c - A^T \pi).$$

Résultats de base sur la dualité

Les conditions nécessaires du problème dual sont

$$Ax = b, x \geq 0,$$
$$A^T \pi \leq c, x_i(c - A^T \pi)_i = 0. \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

En prenant le dual du dual, on retrouve le primal.

Dualité faible Chaque solution réalisable duale fournit une borne inférieure sur la valeur optimale du primal.

Optimalité Des solutions primale et duale avec la même valeur de l'objectif sont toutes deux optimales. Si un des problèmes n'a pas un objectif borné, alors l'autre problème n'a pas de point réalisable.

Dualité forte Si un des problèmes (primal et dual) a une solution avec une valeur optimale de l'objectif finie, alors l'autre problème a également une solution avec un objectif fini, et les valeurs optimales de l'objectif sont égales.

Résumons nos différentes formulations.

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax=b} \left\{ c^T x + E_{\xi} \left[\min_{y \in \mathbb{R}_+^p} \{ q(\xi)^T y \mid Wy = h(\xi) - T(\xi)x \} \right] \right\}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax=b} \left\{ c^T x + E_{\xi} [v(h(\xi) - T(\xi)x)] \right\}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax=b} \left\{ c^T x + E_{\xi} [Q(x, \xi)] \right\}$$

$$\min_{x \in \mathbb{R}_+^n} \left\{ c^T x + Q(x) \mid Ax = b \right\}$$

- Ensemble de faisabilité de première étape :

$$K_1 = \{x \in \mathbb{R}_+^n \mid Ax = b\}.$$

- Ensemble de faisabilité de seconde étape :

$$K_2 = \{x \mid Q(x) < \infty\}.$$

Par conséquent nous pouvons réécrire (encore !) le problème comme suit :

$$\min_x \{c^T x + Q(x) \mid x \in K_1 \cap K_2\}.$$

Recours relativement complet

Un problème est dit avoir un **recours relativement complet** si $K_1 \subseteq K_2$. **Avantage** : pour tout x réalisable en première étape, on aura $Q < \infty$, et donc on ne devra jamais se soucier du cas où $Q(x, \xi) = \infty$.

Poussons plus loin... ensemble des points réalisables en seconde étape pour une réalisation donnée ξ :

$$K_2(\xi) = \{x \mid Q(x, \xi) < \infty\}.$$

Définissons

$$K_2^P = \bigcap_{\xi \in \Xi} K_2(\xi).$$

Clairement, $K_2 = K_2^P$ si ξ est de support fini. Mais est-ce encore le cas si ξ suit une distribution continue ?

Recours relativement complet (2)

Nous avons les résultats suivants.

Théorème

Si ξ a des moments d'ordre 2 finis, $P[\xi \mid Q(x, \xi) < \infty] = 1$ implique $Q(x) < \infty$.

Autrement dit, il faut avoir que $Q(x, \xi)$ est borné supérieurement presque sûrement. Preuve : technique !

Rappel : presque sûrement, ou avec probabilité un. Un événement A est dit avoir lieu presque sûrement si $P[A] = 1$.

Plus intéressant, nous avons que

Théorème

Pour un programme stochastique avec un recours fixe, où ξ a des moments d'ordre 2 finis, les ensembles K_2 et K_2^p coïncident.

Le recours relativement complet est très utile en pratique et dans la théorie, mais peut être difficile à identifier. Un cas particulier de recours relativement complet peut cependant souvent être identifié à partir de la structure de W .

On dira qu'un problème a un **recours complet** si $\forall z \in \mathbb{R}^m$, $v(z) < \infty$. En d'autres termes, $\forall z \in \mathbb{R}^m$, $\exists y \in \mathbb{R}_+^m$ tel que $Wy = z$.

En d'autres termes, nous parlerons de recours complet si la matrice W satisfait

$$\{z \mid z = Wy, y \geq 0\} = \mathbb{R}^m.$$

Ceci implique aussi que $\forall x, T(x), h(x), Q(x, \xi) < \infty$, puisque $z = h - Tx$.

Un cas particulier de recours complet est le **recours simple**, pour lequel nous avons

$$W = (I \quad -I),$$

avec I la matrice identité, d'ordre m .

Dans ce cas, le programme de seconde étape se lit comme

$$\begin{aligned} Q(x, \xi) &= \min_y (q^+)^T y^+ + (q^-)^T y^- \\ \text{t.q. } &y^+ - y^- = h(\xi) - T(\xi)x, \\ &y^+, y^- \geq 0. \end{aligned}$$

Autrement dit, pour $q^+ + q^- \geq 0$, les variables de recours y^+ et y^- peuvent être choisies pour mesurer (positivement) les déficiences absolues dans les contraintes stochastiques.

Théorème

Supposons que le programme stochastique (linéaire) à deux étapes est réalisable et a un recours simple, et que ξ a des moments d'ordre deux finis. Alors $Q(x)$ est fini si et seulement si $\mathbf{q}_i^+ + \mathbf{q}_i^- \geq 0$ avec une probabilité un.

Démonstration.

(\rightarrow) Si $q^+(\omega) + q^-(\omega) < 0$ pour $\omega \in \Omega_1$ où $P[\Omega_1] > 0$, alors, pour n'importe x réalisable, pour tout $\omega \in \Omega_1$ où $h_i(\omega) - T_i(\omega)x > 0$, définissons $y_i^+(\omega) = h_i(\omega) - T_i(\omega)x + u$, $y_i^-(\omega) = u$. En faisant tendre u vers ∞ , $Q(x, \omega) \rightarrow -\infty$. Un argument similaire s'applique si $h_i(\omega) - T_i(\omega)x \leq 0$, aussi Q n'est pas fini.

(\leftarrow) Si $q_i^+ + q_i^- \geq 0$ avec une probabilité un, pour presque tout ω , nous avons

$$Q(x, \omega) = \sum_{i=1}^m (q_i^+(\omega)(h_i(\omega) - T_i(\omega)x)^+ + q_i^-(\omega)(-h_i(\omega) + T_i(\omega)x)^+)$$

(il suffit d'écrire les conditions KKT pour s'en convaincre). Par conséquent, $Q(x, \omega)$ est fini pour presque tout ω . Comme précédemment, il est possible de déduire que $Q(x)$ est fini. \square

- La facilité de résolution d'un tel problème dépend des propriétés de $Q(x)$, à étudier donc ! Voir aussi Section 1.4 de Kall et Wallace.
- Si la dualité en programmation linéaire tient,

$$v(z) = \min_{y \in \mathbb{R}^p} \{q(\omega)^T y \mid Wy = z\} = \max_{t \in \mathbb{R}^m} \{z^T t \mid W^T t \leq q\}.$$

- Soit $\Lambda = \{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{|\Lambda|}\}$ l'ensemble des points extrémaux de $\{t \in \mathbb{R}^m \mid W^T t \leq q\}$.
 - Chacun de ces points extrêmes λ_k est potentiellement une solution optimale du programme linéaire.
 - En fait, nous sommes certains qu'il n'y a pas de solution optimale meilleure que celle rencontrée sur un point extrême, aussi

$$v(z) = \max_{k=1, \dots, |\Lambda|} z^T \lambda_k, \quad z \in \mathbb{R}^m.$$

Fonction de recours (3)

Soit y_1^* et y_2^* deux solutions optimales de $v(z)$, associées à $z = z_1$ et $z = z_2$, respectivement. $\alpha y_1^* + (1 - \alpha)y_2^*$ est réalisable, et

$$\begin{aligned}v(z_\alpha) &= q(\omega)^T z_\alpha^* \leq q(\omega)^T (\alpha y_1^* + (1 - \alpha)y_2^*) \\ \alpha q(\omega)^T y_1^* + (1 - \alpha)q(\omega)^T y_2^* &= \alpha v(z_1) + (1 - \alpha)v(z_2).\end{aligned}$$

Autrement dit, v est une fonction convexe de $z \in \mathbb{R}^m$!

On a aussi

Théorème

Si $f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)$ est une collection arbitraire de fonctions convexes, alors $M(x) = \max\{f_1(x), f_2(x), \dots, f_q(x)\}$ est aussi une fonction convexe.

Et à propos de $Q(x, \xi)$?

$$Q(x, \xi) = v(h(\omega) - T(\omega)x).$$

$$\begin{aligned} \lambda Q(x_1, \xi) + (1 - \lambda)Q(x_2, \xi) &= \lambda v(h(\omega) - T(\omega)x_1) + (1 - \lambda)v(h(\omega) - T(\omega)x_2) \\ &\geq v(\lambda(h(\omega) - T(\omega)x_1) + (1 - \lambda)(h(\omega) - T(\omega)x_2)) \\ &= v(h(\omega) - T(\omega)(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2)) \\ &= Q(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2, \xi). \end{aligned}$$

Par conséquent $Q(x, \xi)$ est convexe en x pour ξ fixé.
Plus généralement

Théorème

Si A est une transformation linéaire de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R}^n , et $f(x)$ est une fonction convexe sur \mathbb{R}^m , la fonction composite $(fA)(x) \stackrel{\text{def}}{=} f(Ax)$ est une fonction convexe sur \mathbb{R}^n .

Plus précisément, nous avons le résultat suivant (Birge et Louveaux, Chapitre 3, Théorème 5).

Théorème

Pour un programme stochastique avec recours fixe, $Q(x, \xi)$ est

- (a) une fonction convexe linéaire par morceaux en (h, T) ,*
- (b) une fonction linéaire concave par morceaux en q ,*
- (c) une fonction linéaire convexe par morceaux en x pour tout x dans $K = K_1 \cap K_2$.*

Convexité de la fonction de seconde étape (2)

Démonstration.

Pour montrer la convexité dans (a) et (c), il suffit de prouver que $v(z) = \min\{q(\omega)^T y \mid Wy = z\}$ est convexe. Yep, c'est fait ! On peut procéder similairement pour la concavité par rapport à q . La linéarité par morceaux suit de l'existence d'un nombre fini de bases optimales différentes pour le programme de seconde étape (détails omis). \square

Convexité du recours ?

$$Q(x) = E_{\xi}[Q(x, \xi)].$$

Pour le moment, supposons que ξ vient d'un espace de probabilité de support fini, i.e. $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_m\}$. Dès lors

$$Q(x) = \sum_{i=1}^m P[\xi = \xi_i] Q(x, \xi_i).$$

Théorème

Si $f(x)$ est convexe, et $\alpha \geq 0$, $g(x) = \alpha f(x)$ est convexe.

Théorème

Si $f_k(x)$, $k = 1, 2, \dots, K$, sont des fonctions convexes, alors $g(x) = \sum_{k=1}^K f_k(x)$ est convexe.

Dès lors, $Q(x)$ est une fonction convexe de x .

Quid de la convexité dans le cas continu ?

On a le résultat suivant : si $g(x, y)$ est convexe en x , alors $\int g(x, y) dy$ est convexe en x . Or

$$Q(x) = \int_{\Xi} Q(x, t) dF(t).$$

Par conséquent, $Q(x)$ est convexe.

Un exemple...

Considérons la fonction de seconde étape $Q(x, \xi)$ définie comme suit :

$$\min y^+ + y^- \text{ t.q. } y^+ - y^- = \xi - x, y^+ \geq 0, y^- \geq 0.$$

Autrement dit :

$$y = \begin{pmatrix} y^+ \\ y^- \end{pmatrix} \quad q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, W = (1 \quad -1) \quad h(\omega) = \xi \quad T(\omega) = 1.$$

Le recours est simple, et les conditions KKT nous donnent

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \pi + \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \end{pmatrix} \\ y^+ - y^- &= \xi - x \\ y^+ &\geq 0, y^- \geq 0 \\ s_1 &\geq 0, s_2 \geq 0 \\ s_1 y^+ &= 0, s_2 y^- = 0. \end{aligned}$$

Un exemple (2)

- La condition sur le Lagrangien implique que nous ne pouvons pas avoir $s_1 = s_2 = 0$.
- Des conditions de complémentarités, nous tirons que $y^+ = 0$ ou $y^- = 0$.
- Deux cas de figures se présentent :
 - $x \leq \xi$: dans ce cas, nous avons

$$y^+ = \xi - x, \quad y^- = 0.$$

- $x \geq \xi$: alors,

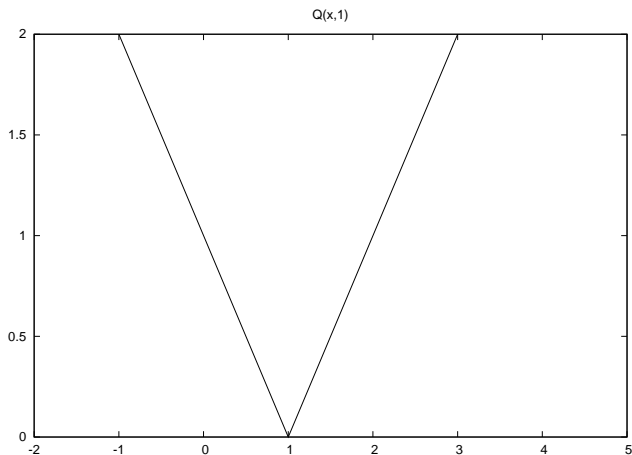
$$y^- = x - \xi, \quad y^+ = 0.$$

- Par conséquent,

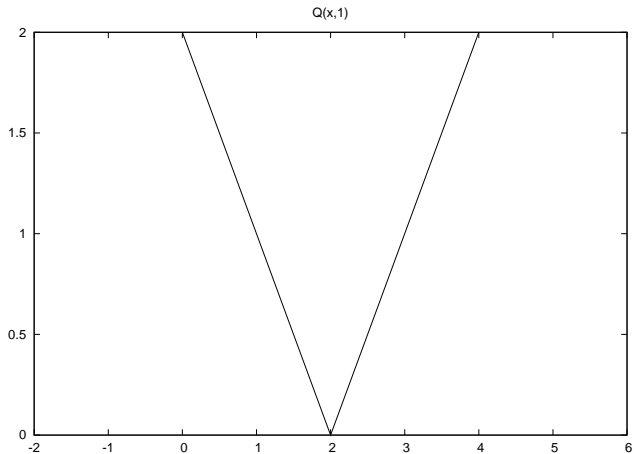
$$Q(x, \xi) = \begin{cases} \xi - x & \text{si } x \leq \xi, \\ x - \xi & \text{si } x \geq \xi. \end{cases}$$

Graphiquement ?

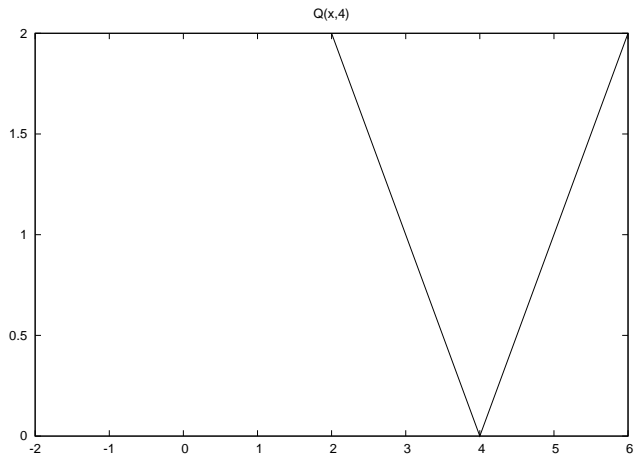
Supposons que ξ peut prendre les réalisations 1, 2, 4.



Graphiquement



Graphiquement



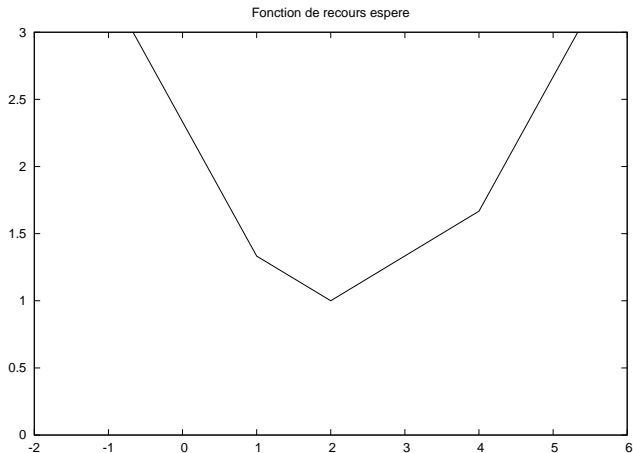
Qu'en est-il de $Q(x)$?

Supposons que les trois réalisations sont équiprobables.

Nous devons considérer 4 cas :

- 1 $x \leq 1 : Q(x) = 7/3 - x ;$
- 2 $1 \leq x \leq 2 : Q(x) = 5/3 - x/3 ;$
- 3 $2 \leq x \leq 4 : Q(x) = x/3 + 1/3 ;$
- 4 $4 \leq x : Q(x) = x - 7/3 ;$

Graphiquement



Propriétés de $Q(x)$

On remarque que $Q(x)$ est convexe et linéaire par morceaux. Comme $Q(x)$ est une somme pondérée de fonctions linéaires par morceaux dans le cas où le support de ξ est fini, nous avons le théorème suivant.

Théorème

Pour un programme stochastique avec un recours fixe où ξ a des moments finis d'ordre 2,

- (a) $Q(x)$ est une fonction convexe lipschitzienne et est finie sur K_2 ;*
- (b) quand ξ est fini, $Q(x)$ est linéaire par morceaux.*

Rappel : une fonction f est dite lipschitzienne s'il existe un certain $M < \infty$ tel que pour tout x, y ,

$$|f(x) - f(y)| \leq M\|x - y\|.$$

Différentiabilité du recours

Ok pour la convexité, mais $Q(x)$ est-elle différentiable ?

La fonction de recours est partiellement différentiable par rapport à x_j en $(\hat{x}, \hat{\xi})$ si la dérivée directionnelle existe pour la direction e_j . Une autre manière de l'exprimer est de dire qu'il existe une fonction $\frac{\partial Q(x, \xi)}{\partial x_j}$ t.q.

$$\frac{Q(\hat{x} + he_j, \hat{\xi}) - Q(\hat{x}, \hat{\xi})}{h} = \frac{\partial Q(x, \xi)}{\partial x_j} + \frac{\rho_j(\hat{x}, \hat{\xi}; h)}{h},$$

avec

$$\frac{\rho_j(\hat{x}, \hat{\xi}; h)}{h} \rightarrow 0, \text{ comme } h \rightarrow 0.$$

Supposons que $\nabla_x Q(x, \xi) = \left(\frac{\partial Q(x, \xi)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial Q(x, \xi)}{\partial x_n} \right)$ existe.

Différentiabilité du recours (2)

Qu'en est-il de la différentiabilité de $Q(x)$?

$$\begin{aligned}\frac{Q(\hat{x} + he_j) - Q(\hat{x})}{h} &= \int_{\Xi} \frac{Q(\hat{x} + he_j, \xi) - Q(\hat{x}, \xi)}{h} dP \\ &= \int_{\Xi \setminus N_\delta} \frac{\partial Q(\hat{x}, \xi)}{\partial x_j} dP + \int_{\Xi \setminus N_\delta} \frac{\rho_j(\hat{x}, \xi; h)}{h} dP,\end{aligned}$$

où N_δ est mesurable et $P[N_\delta] = 0$. Dès lors

Théorème

Si $Q(x, \xi)$ est partiellement différentiable presque partout, sa dérivée partielle $\frac{\partial Q(\hat{x}, \xi)}{\partial x_j}$ est intégrable et si le résidu satisfait $(1/h) \int_{\Xi \setminus N_\delta} \rho_j(\hat{x}, \xi; h) dP \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$, alors $\frac{\partial Q(\hat{x})}{\partial x_j}$ existe et

$$\frac{\partial Q(\hat{x})}{\partial x_j} = \int_{\Xi} \frac{\partial Q(\hat{x}, \xi)}{\partial x_j} dP.$$

C'est très bien. . . , mais je prouve comment que

$$(1/p) \int_{\Xi \setminus N_\delta} \rho_j(\hat{x}, \xi; h) dP \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 ?$$

Si on reste dans le cadre linéaire avec des recours fixes, et des vecteurs ξ d'ordre 2 finis, nous avons vu que pour ξ de support fini, $Q(x)$ est linéaire par morceaux. Par conséquent, $Q(x)$ n'est pas différentiable.

Si ξ est continu, $Q(x)$ s'obtient comme intégrale sur les $Q(x, \xi)$, lesquels sont non-différentiables puisque linéaires par morceaux pour ξ fixé. Toutefois, c'est x qui doit être fixé, non ξ . De manière assez technique, il est possible de montrer que

Théorème

Pour un programme stochastique avec recours fixe où ξ a des moments d'ordre deux finis, si ξ est continue, $Q(x)$ est différentiable sur K_2 .

Intuitivement, la fonction $Q(x)$ est "lissée" par la superposition d'une infinité de fonctions $Q(x, \xi)$.

Problèmes non-linéaires à 2 étapes

Considérons à présent le programme général

$$\min_{x \in X} E_{\xi}[f_0(x, \xi)] = \min_{x \in X} E_{\xi}[g_0(x, \xi) + Q(x, \xi)].$$

Théorème

Si $g_0(\cdot, \xi)$ et $Q(\cdot, \xi)$ sont convexe en x , $\forall \xi \in \Xi$, et si X est un ensemble convexe, alors le programme ci-dessus est convexe.

Démonstration.

Pour $x, y \in X$, $\lambda \in (0, 1)$ et $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$, nous avons

$$\begin{aligned} g_0(z, \xi) + Q(z, \xi) \\ \leq \lambda(g_0(x, \xi) + Q(x, \xi)) + (1 - \lambda)(g_0(y, \xi) + Q(y, \xi)). \end{aligned}$$

Le résultat suit en prenant l'espérance. □

Sous forme plus standard

Inspiré de la Section 3.4 de Birge et Louveaux.

Nous considérons le problème

$$\begin{aligned} \inf z &= f^1(x) + Q(x), \\ \text{t.q. } g_i^1(x) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, \bar{m}_1, \\ g_i^1(x) &= 0, \quad i = \bar{m}_1 + 1, \dots, m_1, \end{aligned}$$

où $Q(x) = E_\omega[Q(x, \omega)]$ et

$$\begin{aligned} Q(x, \omega) &= \inf f^2(y(\omega), \omega), \\ \text{t.q. } t_i^2(x, \omega) + g_i^2(y(\omega), \omega) &\leq 0, \quad i = 1, \dots, \bar{m}_2, \\ t_i^2(x, \omega) + g_i^2(y(\omega), \omega) &= 0, \quad i = \bar{m}_2 + 1, \dots, m_2, \end{aligned}$$

On parle de recours additif (pourquoi ?).

Sous forme plus standard (2)

Les fonctions $f^2(\cdot, \omega)$, $t_i^2(\cdot, \omega)$, et $g_i^2(\cdot, \omega)$ sont continues pour n'importe que ω fixé, et mesurables en ω pour n'importe quel premier argument fixé. Ceci permet de prouver que $Q(x, \omega)$ est mesurable, et donc que $Q(x)$ est bien défini.

Réintroduisons K_1 , $K_2(\omega)$ et K_2 .

$$K_1 = \{x \mid g_i^1(x) \leq 0, i = 1, \dots, \bar{m}_1, \\ g_i^1(x) = 0, i = \bar{m}_1 + 1, \dots, m_1\},$$

$$K_2(\omega) = \{x \mid \exists y(\omega) \text{ t.q. } t_i^2(x, \omega) + g_i^2(y(\omega), \omega) \leq 0, i = 1, \dots, \bar{m}_2, \\ t_i^2(x, \omega) + g_i^2(y(\omega), \omega) = 0, i = \bar{m}_2 + 1, \dots, m_2\},$$

$$K_2 = \{x \mid Q(x) < \infty\}.$$

La formulation n'est pas encore complètement générale. Nous aborderons des formulations plus générales en introduisant les techniques d'échantillonnages.

Ici, il n'y a plus de recours fixe, mais la décision de première étape x agit séparément dans les contraintes. But : étendre les résultats précédents.

Questions : convexité, différentiabilité, optimalité. On abordera aussi le concept de semi-continuité par le bas.