

# Modèles stochastique: exemples en finance

Fabian Bastin

DIRO, Université de Montréal

IFT-6521 – Hiver 2011

# PD pour évaluer une option américano-asiatique

Le prix d'un actif évolue selon un processus stochastique  $\{S(t), t \geq 0\}$  à valeurs dans  $[0, \infty)$ . Ce processus est **observé aux instants** (fixes)  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ . Un contrat financier (option) de type américain-bermudien procure un **revenu** immédiat  $g_j(S(t_1), \dots, S(t_j))$  si on **exerce l'option** au temps  $t_j$ , pour  $m^* \leq j \leq n$ .

En supposant que le processus évolue sous la mesure de risque neutre et que le taux d'intérêt est  $r$ , la **valeur** du contrat au temps  $t_j$  si  $(S(t_0), \dots, S(t_j)) = (s_0, \dots, s_j)$  est  $v_j(s_0, \dots, s_j)$ , où les fonctions  $v_j$  obéissent aux équations de récurrence:

$$v_j(s_0, \dots, s_j) = \begin{cases} \max(0, g_n(s_1, \dots, s_n)) & \text{si } j = n; \\ \max\left(g_j(s_1, \dots, s_j), v_j^h(s_0, \dots, s_j)\right) & \text{si } m^* \leq j < n; \\ v_j^h(s_0, \dots, s_j) & \text{si } j < m^*. \end{cases}$$

avec la **valeur de rétention**

$$v_j^h(s_0, \dots, s_j) = \mathbb{E} \left[ e^{-r(t_{j+1}-t_j)} v_{j+1}(s_0, \dots, s_j, S(t_{j+1})) \mid s_0, \dots, s_j \right]$$

Si  $g$  est très simple, on peut parfois trouver une formule analytique pour  $v_j$ .

Si  $v_j$  peut s'écrire comme une fonction de peu de variables, alors on peut résoudre numériquement.

**Exemple:** Option de type asiatique, pour laquelle

$$g_j(s_1, \dots, s_j) = \max(0, \bar{s}_j - K)$$

pour une constante  $K > 0$ , où  $\bar{s}_j = (s_1 + \dots + s_j)/j$ .

Dans ce cas,  $v_j$  ne dépend que de  $(s_j, \bar{s}_j)$  (état à 2 dimensions):

$$v_j(s_j, \bar{s}_j) = \begin{cases} \max(0, \bar{s}_n - K) & \text{pour } j = n; \\ \max(\bar{s}_j - K, v_j^h(s_j, \bar{s}_j)) & \text{pour } m^* \leq j < n; \\ v_j^h(s_j, \bar{s}_j) & \text{pour } j < m^*. \end{cases}$$

où

$$v_j^h(s_j, \bar{s}_j) = e^{-r(t_{j+1}-t_j)} \mathbb{E} [v_{j+1}(S(t_{j+1}), (j\bar{s}_j + S(t_{j+1}))/j) | s_j].$$

Pour  $m^* \leq j < n$ , on exercera l'option ssi  $\bar{s}_j - K \geq v_j^h(s_j, \bar{s}_j)$ .

Quelle est la forme de la région d'exercice? Et des fonctions  $v_j^h$  et  $v_j$ ?

Pour répondre à ces questions, il faut des hypothèses sur le processus  $S$ .

### Mouvement Brownien géométrique.

$$S(t) = S(0)e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma B(t)}$$

où  $r$  est le **taux d'intérêt** sans risque,  $\sigma$  est la **volatilité**, et  $B(\cdot)$  est un **mouvement Brownien** standard.

Pour  $t_2 > t_1 \geq 0$ ,  $B(t_2) - B(t_1)$  est une v.a. normale de moyenne 0 et variance  $t_2 - t_1$ , indépendante des accroissements de  $B(\cdot)$  en dehors de  $[t_1, t_2]$ .

Supposons  $t_{j+1} - t_j = h$ ,  $\forall j$ , et posons  $\rho = e^{-rh}$ .

Technique... voir Ben-Ameur, Breton et L'Ecuyer, Management Science, 2002.

# PD pour évaluer des options sur des bonds rachetables et encaissables

Ben-Ameur, Breton. Karoui, L'Ecuyer, *A dynamic programming approach for pricing options embedded in bonds*, 2007.

On suppose que le **taux d'intérêt**  $\{R(t), t \geq 0\}$  évolue selon une équation différentielle stochastique de la forme

$$dR(t) = \kappa(\bar{r} - R(t))dt + \sigma R(t)^\theta dB(t), \quad \text{pour } 0 \leq t \leq T, \quad (1)$$

où  $\{B(t), t \geq 0\}$  est un mouvement Brownien standard, tandis que  $\kappa, \bar{r}, \sigma$ , et  $\theta$ , sont des paramètres réels.

Différentes versions (les valeurs non indiquées sont arbitraires):

Modèle	$\bar{r}$	$\kappa$	$\theta$
1. Vasicek (1977)			0
2. Brennan-Schwartz (1977)		0	1
3. Brennan-Schwartz (1980)			1
4. Marsh-Rosenfeld (1983)	0		
5. Cox-Ingersoll-Ross (1985a, b)			1/2
6. Hull-White (1990a)	$\bar{r}(t)$		0 or 1/2

Soient  $t_0 = 0$  et  $0 < t_1 < \dots < t_{n-1} < t_n = T$ . Les dates de **coupon** sont  $t_1, \dots, t_{n-1}$  et  $T$  est la date de **maturité**.

Une **décision** d'exercice peut se faire au temps

$\tau_m = t_m - \Delta t > t_{m-1}$ , pour  $m = n^*, \dots, n$ , pour un paiement au temps  $t_m$ . Le délai  $\Delta t$  est la période de **notification** et  $\tau_{n^*}$  est la période de **protection**.

Les **prix** de rachat (par l'émetteur) et de vente (par l'acheteur) au temps  $t_m$  sont  $C_m$  et  $P_m$ , respectivement, pour  $m = n^*, \dots, n$ . On a  $0 \leq P_m \leq C_m$  et  $P_n = C_n = 1$ .

Toutes les espérances sont sous la mesure de risque neutre.

Le **taux d'actualisation** (espéré) pour la période  $[\tau, \tau + \delta]$  lorsque  $R(\tau) = r$  est

$$\rho(r, \tau, \delta) = \mathbb{E} \left[ \exp \left( - \int_{\tau}^{\tau+\delta} R(t) dt \right) \mid R(\tau) = r \right].$$

Le principal est normalisé à 1 et les valeurs de coupons représentées par  $c$ .

Soit  $v(t, r)$  la valeur d'un bon au temps  $t$  si  $R(t) = r$  et que les deux parties optimisent toujours leur revenu espéré actualisé.

On note  $\mathbb{E}_{m,r}[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot \mid R(\tau_m) = r]$ ,  $v_m(r) = v(\tau_m, r)$ , et  $\rho_m(r) = \rho(r, \tau_m, t_m - \tau_m)$ .

La **valeur de retention** sans coupon au temps  $\tau_m$  lorsque  $R(\tau_m) = r$  est

$$v_m^h(r) = \mathbb{E}_{m,r} \left[ v_{m+1}(R(\tau_{m+1})) \exp \left( - \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} R(t) dt \right) \right] \quad (2)$$

pour  $m = n^*, \dots, n$ , et

$$v_0^h(r) = E_{0,r} \left[ v_{n^*}(R(\tau_{n^*})) \exp \left( - \int_0^{\tau_{n^*}} R(t) dt \right) \right].$$

Pour  $m = n^*, \dots, n$ , le **gain espéré** au temps  $\tau_m$  est

$$\begin{aligned} (C_m + c)\rho_m(r) & \text{ si l'émetteur rachète,} \\ v_m^h(r) + c\rho_m(r) & \text{ si aucun des deux n'exerce,} \\ (P_m + c)\rho_m(r) & \text{ si le détenteur vend.} \end{aligned}$$

L'émetteur devrait annoncer le **rachat** à  $\tau_m$  si

$$v_m^h(r) > C_m\rho_m(r).$$

Le détenteur devrait annoncer sa **vente** à  $\tau_m$  si

$$v_m^h(r) < P_m\rho_m(r).$$

Dans les autres cas, le contrat est maintenu pour une autre période, et on a

$$P_m\rho_m(r) \leq v_m^h(r) \leq C_m\rho_m(r).$$

En assemblant ces ingrédients, on obtient les équations de récurrence:

$$\begin{aligned}v_{n+1}(r) &= 1 + c, \\v_m(r) &= \max \left\{ P_m \rho_m(r), \min \left( C_m \rho_m(r), v_m^h(r) \right) \right\} + c \rho_m(r) \\&\text{pour } m = n^*, \dots, n, \\v_0(r) &= v_0^h(r) + c \sum_{m=1}^{n^*} \rho_m(r).\end{aligned}$$

En pratique, on va approximer chaque fonction  $v_m^h$  et  $v_m$ . Pour chaque  $m$ , on calcule  $v_m^h(r)$  à un nombre fini de valeurs de  $r$  en utilisant l'approximation de  $v_{m+1}$  dans l'intégrale, puis on interpole ces valeurs pour obtenir l'approximation de  $v_m^h$ , puis celle de  $v_m$ . On peut aussi directement interpoler  $v_m$  au lieu de  $v_m^h$ . Cela donnera une approximation de la politique optimale pour chacune des deux parties.

Ici, on utilisera une interpolation linéaire par morceaux pour  $v_m$ , ce qui va simplifier beaucoup les calculs.

Soient  $-\infty \leq r_0 < r_1 < \dots < r_p < r_{p+1} = \infty$  les points d'évaluation de  $v_m$ . L'interpolation linéaire par morceaux aura la forme:

$$\widehat{v}_m(r) = \begin{cases} 0 & \text{for } r < r_0; \\ \alpha_i^m + \beta_i^m r & \text{pour } r_i \leq r \leq r_{i+1}, i = 0, \dots, p \end{cases}$$

pour certains coefficients  $\alpha_i^m$  et  $\beta_i^m$ , pour  $i = 0, \dots, p$ , et  $\beta_p^m = 0$ .

Après avoir calculé  $\widehat{v}_m(r_0), \dots, \widehat{v}_m(r_p)$ , on peut déterminer les  $2(p+1)$  coefficients  $\alpha_i^m$  et  $\beta_i^m$  en résolvant le système de  $2(p+1)$  équations linéaires:

$$\widehat{v}_m(r_0) = \alpha_0^m + \beta_0^m r_0,$$

$$\widehat{v}_m(r_i) = \alpha_i^m + \beta_i^m r_i = \alpha_{i-1}^m + \beta_{i-1}^m r_i \quad \text{pour } i = 1, \dots, p,$$

$$0 = \beta_p^m,$$

dont la solution explicite est:  $\beta_p^m = 0$ ,  $\alpha_p^m = \widehat{v}_m(r_p)$ ,

$$\beta_i^m = \frac{\widehat{v}_m(r_{i+1}) - \widehat{v}_m(r_i)}{r_{i+1} - r_i},$$

$$\alpha_i^m = \frac{r_{i+1}\widehat{v}_m(r_i) - r_i\widehat{v}_m(r_{i+1})}{r_{i+1} - r_i},$$

pour  $i = 1, \dots, p-1$ .

La fonction  $\widehat{v}_m$  résultante est continue partout, sauf possiblement à  $r_0$  si  $\widehat{v}_m(r_0) \neq 0$ .

Représentation équivalente:

$$\hat{v}_m(r) = \sum_{i=0}^p N_i(r) \hat{v}_m(r_i)$$

où chaque  $N_i$  est une **fonction chapeau**, définie par les deux segments de droite qui interpolent les trois points  $(r_{i-1}, 0)$ ,  $(r_i, 1)$ ,  $(r_{i+1}, 0)$ , et vaut zéro ailleurs.

Exceptions:  $N_0$  est linéaire entre  $(r_0, 1)$  et  $(r_1, 0)$ , et 0 ailleurs;  
 $N_p$  est linéaire entre  $(r_{p-1}, 0)$  et  $(r_p, 1)$ , et vaut 1 à droite de  $(r_p, 1)$ .

En insérant cette interpolation linéaire par morceaux de  $\widehat{v}_{m+1}$  dans (2), on obtient l'approximation suivante de  $v_m^h(r_k)$  pour chaque point  $r_k$  de la grille:

$$\begin{aligned}\widehat{v}_m^h(r_k) &= \mathbb{E}_{m,r_k} \left[ \exp \left( - \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} R(t) dt \right) \widehat{v}_{m+1}(R(\tau_{m+1})) \right] \\ &= \mathbb{E}_{m,r_k} \left[ \exp \left( - \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} R(t) dt \right) \sum_{i=0}^p N_i(R(\tau_{m+1})) \widehat{v}_{m+1}(r_i) \right] \\ &= \sum_{i=0}^p \widehat{v}_{m+1}(r_i) C_{k,i}^m\end{aligned}$$

pour  $m = n^*, \dots, n$  (et il y a une expression semblable pour  $m = 0$ ), où les constantes  $C_{k,i}^m$  sont calculables à l'avance pour plusieurs variantes du modèle (Vasicek, Vasicek Généralisé, CIR, ...).

Pour Vasicek et CIR, ces constantes ne dépendent de  $m$  que via  $\tau_{m+1} - \tau_m$ , qui est habituellement indépendant de  $m$ , auquel cas les constantes ne dépendent pas de  $m$ .

$$C_{k,i}^m = \frac{B_{k,i-1}^m - r_{i-1}A_{k,i-1}^m}{r_i - r_{i-1}} + \frac{r_{i+1}A_{k,i}^m - B_{k,i}^m}{r_{i+1} - r_i}$$

pour tout  $m$ , où

$$A_{k,i}^m = \mathbb{E}_{m,r_k} \left[ \exp \left( - \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} R(t) dt \right) \mathbb{I}(r_i \leq R(\tau_{m+1}) < r_{i+1}) \right],$$

$$A_{k,i}^0 = \mathbb{E}_{0,r_k} \left[ \exp \left( - \int_{\tau_0}^{\tau_{n^*}} R(t) dt \right) \mathbb{I}(r_i \leq R(\tau_{n^*}) < r_{i+1}) \right],$$

$$B_{k,i}^m = \mathbb{E}_{m,r_k} \left[ \exp \left( - \int_{\tau_m}^{\tau_{m+1}} R(t) dt \right) R(\tau_{m+1}) \mathbb{I}(r_i \leq R(\tau_{m+1}) < r_{i+1}) \right],$$

$$B_{k,i}^0 = \mathbb{E}_{0,r_k} \left[ \exp \left( - \int_{\tau_0}^{\tau_{n^*}} R(t) dt \right) R(\tau_{n^*}) \mathbb{I}(r_i \leq R(\tau_{n^*}) < r_{i+1}) \right].$$

Dans l'article, les auteurs obtiennent la loi de probabilité conjointe du vecteur

$$\left( R(\tau + \delta), \int_{\tau}^{\tau + \delta} R(t) dt \right)$$

conditionnelle à  $R(\tau) = r$ . À partir de cette loi, on trouve ensuite des formules explicites pour les termes  $A_{k,i}^m$ ,  $B_{k,i}^m$  et  $\rho(r_k, \tau_m, \delta)$ .

## Illustration numérique.

On considère un bond émis par la Suisse pour la période 1987–2012, à évaluer à la date  $t_0 = 0$  correspondant au 23 décembre 1991. Ceci donne  $n = 21$ ,  $T = t_n = 20.172$  années, et on considère un coupon de  $c = 0.0425$  une fois par année, le premier arrivant au temps  $t_1 = 0.172$ .

On a  $n^* = 11$  et la période de notification est  $\Delta t = t_m - \tau_m = 1/6$  (2 mois). Les autres paramètres sont donnés dans l'article.

Points de la grille:  $r_1, \dots, r_p$  également espacés, avec  $r_0 = -\infty$ ,  $r_1 = \bar{r} - 6\sigma_1$  and  $r_p = \bar{r} + 6\sigma_1$  pour Vasicek model, et  $r_0 = 0$ ,  $r_1 = 10^{-6}$  et  $r_p = 3$ , pour CIR.

Résultats avec  $p = 1200$

## Prices obtained by three methods for the Vasicek and CIR models

$r$	Vasicek model			CIR model		
	BW	DFVL	BBKL	BW	DFVL	BBKL
0.01	0.8556	0.84282	0.84285	0.9392	0.93926	0.93921
0.02	0.8338	0.82627	0.82630	0.9159	0.91598	0.91595
0.03	0.8223	0.81010	0.81009	0.8933	0.89333	0.89330
0.04	0.8062	0.79420	0.79423	0.8712	0.87127	0.87125
0.05	0.7904	0.77868	0.77871	0.8498	0.84980	0.84978
0.06	0.7749	0.76348	0.76351	0.8289	0.82890	0.82888
0.07	0.7598	0.74860	0.74862	0.8085	0.80855	0.80854
0.08	0.7450	0.73403	0.73406	0.7887	0.78874	0.78873
0.09	0.7305	0.71977	0.71980	0.7694	0.76945	0.76945
0.10	0.7163	0.70578	0.70583	0.7507	0.75067	0.75067