

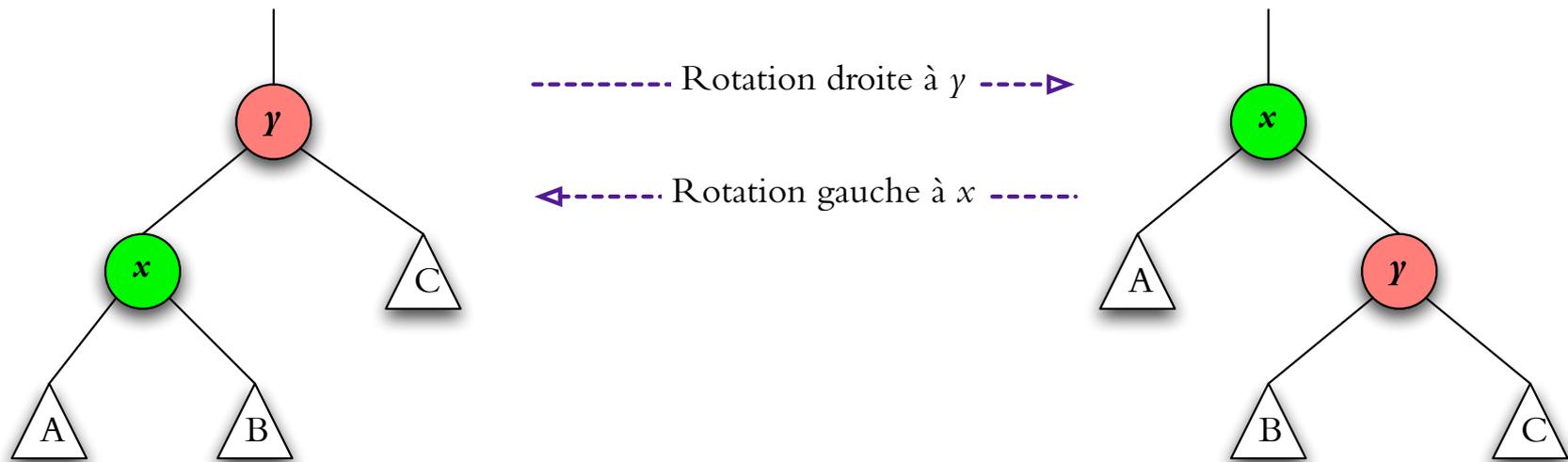
Arbres balancés

Arbres balancés (ou équilibrés) : on maintient une condition qui assure que les sous-arbres ne sont trop différents à aucun nœud.

Si l'on veut maintenir une condition d'équilibre, il faudra travailler un peu plus à chaque (ou quelques) opérations. . . mais on veut toujours maintenir $O(\log n)$ par opération

Balancer les sous-arbres

Méthode : rotations (gauche ou droite) — préservent la propriété des arbres de recherche et prennent seulement $O(1)$



Arbres AVL

AVL : Adelson-Velsky et Landis (1962)

Déf. Un arbre binaire est un arbre AVL ssi à chaque nœud, l'hauteur du sous-arbre gauche et l'hauteur du sous-arbre droit diffèrent par 1 au plus.

(L'hauteur d'un sous-arbre vide = -1.)

On va donc stocker l'hauteur de chaque sous-arbre à sa racine.

Remarque. On peut calculer l'hauteur de tous les nœuds en parcours post-fixe. . .

Hauteur d'un arbre AVL

Soit $N(h)$ le nombre minimal de nœuds dans un arbre AVL de hauteur $h \geq 0$.
On a $N(0) = 1$, $N(1) = 2$.

Lemme. Pour tout $h > 1$,

$$N(h) = N(h - 1) + N(h - 2) + 1.$$

Lemme Il existe $c > 0$ tel que $N(h) \leq c\phi^h - 1$ pour tout $h \geq 0$ où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Preuve La constante c sera spécifiée plus tard. Supposons que $N(k) \leq c\phi^k - 1$ pour tout $0 \leq k < h$. Alors,

$$N(h) = N(h - 1) + N(h - 2) + 1 \leq c\phi^{h-1} + c\phi^{h-2} - 1 = c\phi^h - 1.$$

Si on choisit $c = 2$, la borne est correcte pour $h = 0, 1$ et donc elle est correcte pour tout h . \square

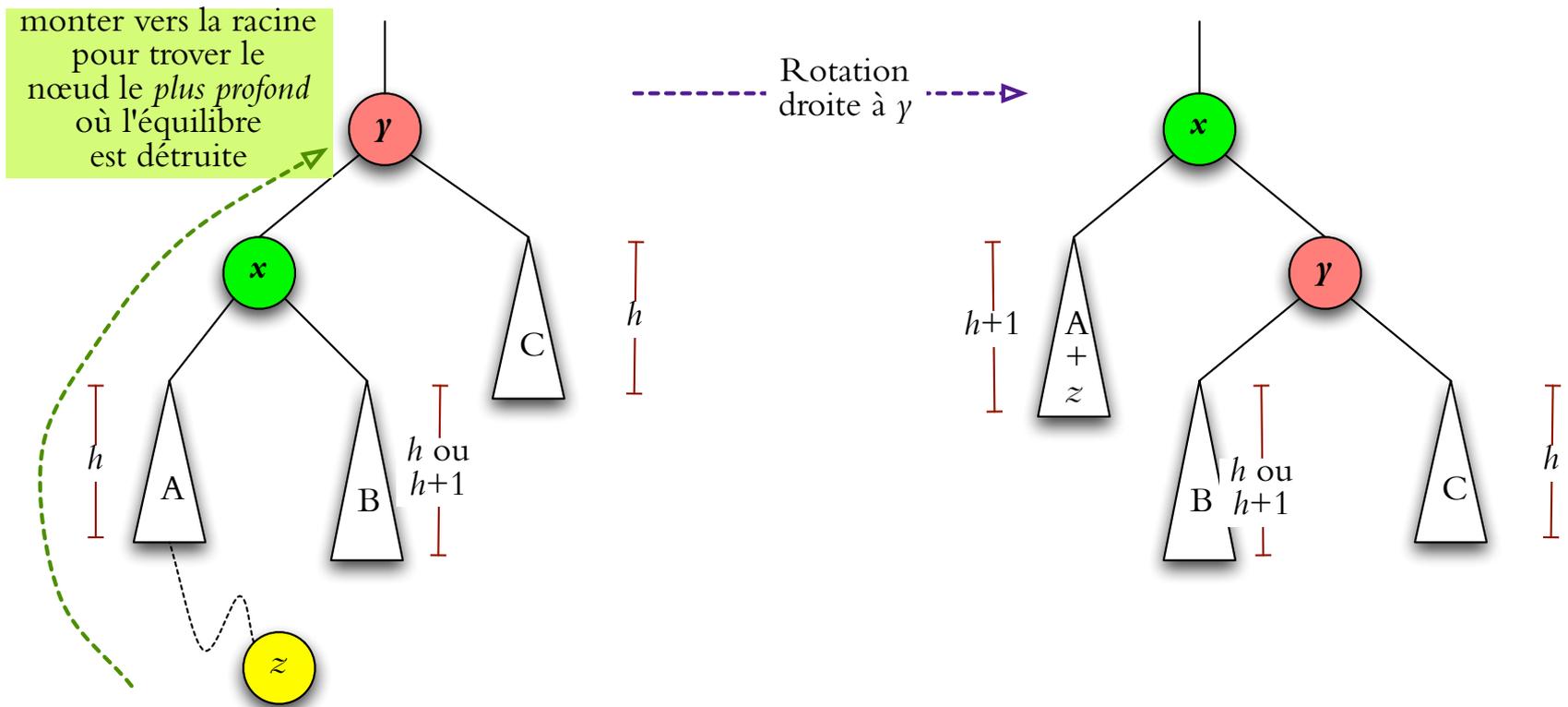
Hauteur d'un arbre AVL (cont)

Donc un arbre AVL sur n nœuds est de l'hauteur

$$h \leq \log_{\phi} \frac{n+1}{2} = \frac{\lg(n+1) - 1}{\lg \phi} \approx 1.44 \lg n \in O(\log n).$$

Insertion dans arbre AVL

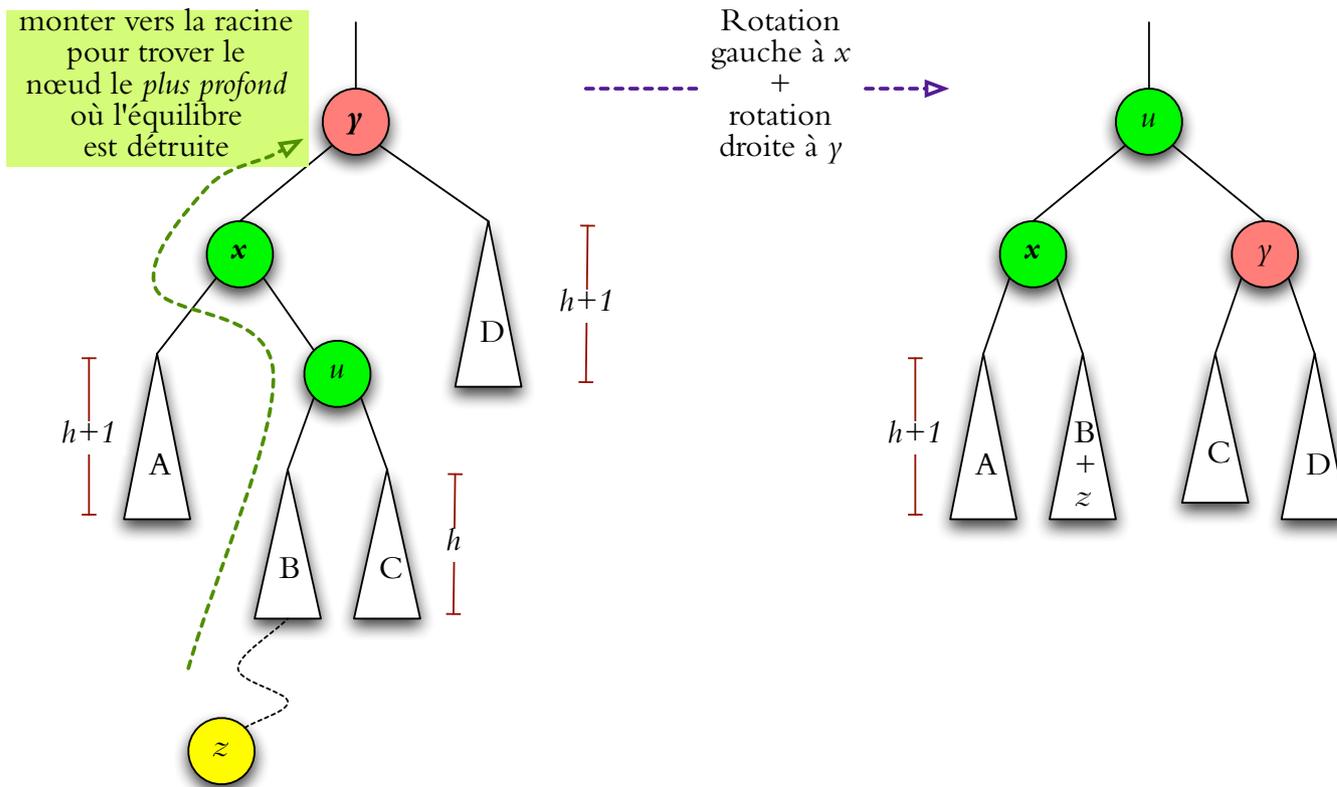
Insertion dans le sous-arbre gauche d'un enfant gauche : une rotation si nécessaire



(cas symétrique si sous-arbre droit d'un enfant droit)

Insertion dans arbre AVL (cont)

Sous-arbre droit d'un enfant gauche :



(cas symétrique si sous-arbre gauche d'un enfant droit)

Arbres AVL

Suppression : parfois $\Theta(\log n)$ rotations sont nécessaires

Après avoir trouvé le nœud affecté par l'opération (insertion ou suppression) en descendant, il faut monter de nouveau pour vérifier les conditions d'équilibre.

Il faut maintenir le hauteur de chaque sous-arbre

(En fait, on peut implanter en utilisant seulement trois valeurs $-1, 0, +1$ pour stocker la différence entre les hauteurs des sous-arbres — 2 bits par nœud)

C'est $O(\log n)$ mais prend trop de travail (beaucoup de rotations dans le pire cas de suppression) et une valeur à maintenir à chaque nœud ...

Arbres rouge-noir

Idée : une valeur entière non-négative, appelée le *rang*, associée à chaque nœud.

Notation : $\text{rang}(x)$.

(rang pour les arbres RN comme la hauteur pour les arbres AVL)

Pour la discussion des arbres rouge et noir, on va considérer les pointeurs **null** pour des enfants manquants comme des pointeurs vers des **feuilles**

Donc toutes les feuilles sont **null** et tous les nœuds avec une valeur $\text{val}()$ sont des nœuds internes.

Arbres RN (cont)

Règles :

1. Pour chaque nœud x excepté la racine,

$$\text{rang}(x) \leq \text{rang}(\text{parent}(x)) \leq \text{rang}(x) + 1.$$

2. Pour chaque nœud x avec grand-parent $y = \text{parent}(\text{parent}(x))$,

$$\text{rang}(x) < \text{rang}(y).$$

3. Pour chaque feuille (null) on a $\text{rang}(x) = 0$ et $\text{rang}(\text{parent}(x)) = 1$.

Arbres RN (cont)

D'où vient la couleur ?

Les nœuds peuvent être coloriés par rouge ou noir.

- si $\text{rang}(\text{parent}(x)) = \text{rang}(x)$, alors x est colorié par **rouge**
- si x est la racine ou $\text{rang}(\text{parent}(x)) = \text{rang}(x) + 1$, alors x est colorié par **noir**

Thm. Coloriage :

(0) chaque nœud est soit noir soit rouge

(i) chaque feuille (**null**) est noire

(ii) le parent d'un nœud rouge est noir

(iii) chaque chemin reliant un nœud à une feuille dans son sous-arbre contient le même nombre de nœuds noirs

Preuve En (iii), le nombre de nœuds noirs sur le chemin est égal au rang. \square

\Rightarrow rang est parfois appelé «hauteur noire»

Arbres RN (cont)

r rang

