

IFT2010 Hiver 2006 — Devoir 2

Miklós Csűrös

23 février 2006

À remettre au cours du 14 mars.

1 Faux parcours (25 points)

On suppose que les entiers compris entre 1 et 1000 sont disposés dans un arbre binaire de recherche, et on souhaite retrouver le nombre 363. Parmi les séquences suivantes, lesquelles ne pourraient pas être la séquence de nœuds parcourus ? Justifiez votre réponse.

- a. 2, 252, 401, 398, 330, 344, 397, 363.
- b. 924, 220, 911, 244, 898, 258, 362, 363.
- c. 925, 202, 911, 240, 912, 245, 363.
- d. 2, 399, 387, 219, 266, 382, 381, 278, 363.
- e. 935, 278, 347, 621, 299, 392, 358, 363.

2 Exemple AVL (25 points)

Montrez l'arbre AVL résultant de l'insertion des éléments 4,3,2,1,7,6,5 (dans cet ordre). L'arbre est vide au début. Montrez les étapes intermédiaires (l'arbre après chaque insertion).

3 Arbre et tri (20 points)

Le tri de n éléments prend un temps $\Omega(n \log n)$ dans le pire des cas¹. Montrez que tout algorithme² pour construire un arbre binaire de recherche à partir d'une liste de n éléments doit prendre $\Omega(n \log n)$ temps dans le pire des cas.

¹comparaison de paires des éléments en $O(1)$

²qui utilise la même méthode de comparaison que le tri pour déterminer la relation des nœuds

4 Équilibre dans un arbre rouge et noir (30 points)

Un arbre AVL est un arbre binaire de recherche dans lequel l'hauteur des sous-arbres diffère par 1 au plus à chaque nœud. Est-ce qu'il existe une relation pareille entre les hauteurs des sous-arbres dans un arbre rouge et noir aussi? Pour la discussion formelle, on définit $h(x)$ comme la hauteur du sous-arbre enraciné à x . Dans un arbre AVL, on a

$$|h(\text{left}(x)) - h(\text{right}(x))| \leq 1$$

à chaque nœud x . (On pose $h(\text{null}) = -1$.) Il n'est pas possible de trouver une relation tout à fait similaire dans un arbre rouge et noir. Par contre, il existe une constante $a > 1$ tel que pour chaque nœud x d'un arbre rouge et noir, si $h(\text{right}(x)) > 1$ et $h(\text{left}(x)) > 1$, alors

$$\frac{1}{a} \leq \frac{h(\text{left}(x))}{h(\text{right}(x))} \leq a. \quad (\star)$$

Trouver une valeur de a pour l'inégalité (\star), et démontrez qu'elle est correcte. Indice : considérez le rang (hauteur noire) de x et le coloriage des nœuds sur les chemins.