

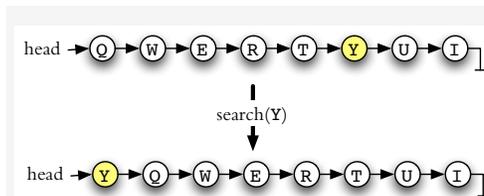
IFT2015 automne 2011 — Devoir 1

Miklós Csűrös

9 septembre 2011

À remettre avant 15 :15 le 16 septembre. Remettez un rapport écrit par courriel (à csuros@iro...) en format PDF. Travaillez seul.

1.1 Move-to-front (15 points)



Lors de la recherche de clé sur une liste chaînée, parfois on utilise la heuristique MTF (*move-to-front*) de déplacer l'élément trouvé à la tête. (Lors d'une recherche infructueuse, la liste ne change pas.)

► Montrez l'implantation de l'opération $\text{search}(x)$ qui performe la recherche séquentielle pour une clé x sur une liste chaînée selon la heuristique MTF. Montrez tous les détails de l'algorithme.

La liste est simplement chaînée; sa tête est stocké par la variable head ; et chaque nœud N possède les variables $N.\text{next}$, $N.\text{key}$ pour «suivant» et «clé». La fin de la liste est dénotée par null .

1.2 Nombre harmonique (15+6 points)

Le **nombre harmonique** $H(n)$ est défini pour tout $n = 1, 2, \dots$ par

$$H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

a. (5 points) ► Donnez une définition récursive pour $H(n)$.

b. (10 points) ► Démontrez par induction que pour tout $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$H(2015^k) \geq 1 + \frac{2014}{2015}k.$$

Indice. Utilisez la borne $x_1 + x_2 + \dots + x_m \geq m \min_{i=1, \dots, m} x_i$ pour les termes de $H(2015^{k+1}) - H(2015^k)$ dans le cas inductif.

c. (6 points boni) ► Démontrez par induction qu'il existe une constante c tel que pour tout nombre Fibonacci $F(n)$ avec $n = 2, 3, 4, \dots$,

$$H(F(n)) \geq \frac{n-2}{\phi^2} + c,$$

où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

REMARQUE. Cet exercice montre que la croissance de $H(n)$ est au moins logarithmique en n . En vérité, $H(n) = \gamma + \ln n + e(n)$, avec une erreur $\lim_{n \rightarrow \infty} e(n) = 0$. La constante $\gamma = 0.57721 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (H(n) - \ln n)$ est la constante d'Euler-Mascheroni.