

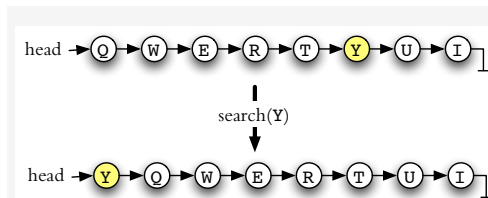
# IFT2015 automne 2011 — Devoir 1

Miklós Csűrös

9 septembre 2011

À remettre avant 15 :15 le 16 septembre. Remettez un rapport écrit par courriel (à csuros@iro...) en format PDF. Travaillez seul.

## 1.1 Move-to-front (15 points)



Lors de la recherche de clé sur une liste chaînée, parfois on utilise la heuristique MTF (*move-to-front*) de déplacer l'élément trouvé à la tête. (Lors d'une recherche infructueuse, la liste ne change pas.)

► Montrez l'implantation de l'opération  $\text{search}(x)$  qui performe la recherche séquentielle pour une clé  $x$  sur une liste chaînée selon la heuristique MTF. Montrez tous les détails de l'algorithme.

La liste est simplement chaînée; sa tête est stocké par la variable  $\text{head}$ ; et chaque nœud  $N$  possède les variables  $N.\text{next}$ ,  $N.\text{key}$  pour «suivant» et «clé». La fin de la liste est dénotée par  $\text{null}$ .

## 1.2 Nombre harmonique (15+6 points)

Le **nombre harmonique**  $H(n)$  est défini pour tout  $n = 1, 2, \dots$  par

$$H(n) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

**a. (5 points)** ► Donnez une définition récursive pour  $H(n)$ .

**b. (10 points)** ► Démontrez par induction que pour tout  $k = 0, 1, 2, \dots$ ,

$$H(2015^k) \geq 1 + \frac{2014}{2015}k.$$

**Indice.** Utilisez la borne  $x_1 + x_2 + \dots + x_m \geq m \min_{i=1, \dots, m} x_i$  pour les termes de  $H(2015^{k+1}) - H(2015^k)$  dans le cas inductif.

**c. (6 points boni)** ► Démontrez par induction qu'il existe une constante  $c$  tel que pour tout nombre Fibonacci  $F(n)$  avec  $n = 2, 3, 4, \dots$ ,

$$H(F(n)) \geq \frac{n-2}{\phi^2} + c,$$

où  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

REMARQUE. Cet exercice montre que la croissance de  $H(n)$  est au moins logarithmique en  $n$ . En vérité,  $H(n) = \gamma + \ln n + e(n)$ , avec une erreur  $\lim_{n \rightarrow \infty} e(n) = 0$ . La constante  $\gamma = 0.57721 \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} (H(n) - \ln n)$  est la constante d'Euler-Mascheroni.