

IFT2015 H07 — Examen Intra

Miklós Csűrös

20 février 2007

Aucune documentation n'est permise. L'examen vaut 100 points.
Répondez à toutes les questions dans les cahiers d'examen.

0 Votre nom (1 point)

Écrivez votre nom et code permanent sur tous les cahiers soumis.

1 Échauffement (10 points)

Donnez la définition du type abstrait de données (TAD). Décrivez un TAD de votre choix vu dans le cours.

2 Le grand O (30 points)

a. (10 points) Considérez la fonction suivante :

$$f(0) = 1; \quad f(n) = 7 \cdot f(\lfloor n/2 \rfloor) + n \quad (n > 0)$$

Démontrez que $f(n) \in O(n^3)$.

b. (10 points) Considérez la fonction suivante :

$$g(0) = g(1) = 1; \quad g(n) = g(\lfloor n/3 \rfloor) + 3 \quad (n > 0)$$

Trouvez la meilleure borne asymptotique pour $g(n)$. Justifiez votre réponse.

c. (10 points) Démontrez que $3^{n+1} \in O(3^n)$, mais $3^{2n} \notin O(3^n)$.

3 Le bronze (10 points)

Donnez un algorithme qui trouve le troisième plus petit élément dans un tableau A représentant un tas binaire (min-tas). Analysez son temps de calcul asymptotique en fonction de la taille n de A .

4 Quadtree (25 points)

Un *quadtree* est une structure de données basée sur un arbre quaternaire. Il sert à représenter un ensemble de points en deux dimensions. Chaque nœud u de l'arbre est associé avec un point $P(u) = (X(u), Y(u))$. Les quatre sous-arbres contiennent points vers nord-ouest, nord-est, sud-est et sud-ouest de $P(u)$. Le fragment de code suivant montre l'implantation d'un tel nœud en Java.

```
class QuadNode
{
    private QuadNode parent;
    private QuadNode NW, NE, SE, SW; // les enfants
    private double X, Y; // les coordonnées du point associé
    ...
}
```

Si un des quadrants ne contient aucun point, alors l'enfant correspondant est `null`; tous les enfants sont `null` si u est une feuille.

Si u est le parent de v , on a toujours

$X(v) < X(u), Y(v) > Y(u)$	si v est à nord-ouest (NW)
$X(v) \geq X(u), Y(v) > Y(u)$	si v est à nord-est (NE)
$X(v) \geq X(u), Y(v) \leq Y(u)$	si v est à sud-est (SE)
$X(v) < X(u), Y(v) \leq Y(u)$	si v est à sud-ouest (SW)

Figure 1 montre l'exemple d'un quadtree.

a. (13 points) Démontrez que la hauteur d'un quadtree sur n points est entre $(n - 1)$ et $\log_4(3n + 1) - 1$.

b. (12 points) Donnez un algorithme pour compter les points à l'est de la racine. Plus précisément, calculez le nombre de nœuds v dans l'arbre avec $X(v) \geq X(r)$ où r est la racine du quadtree.

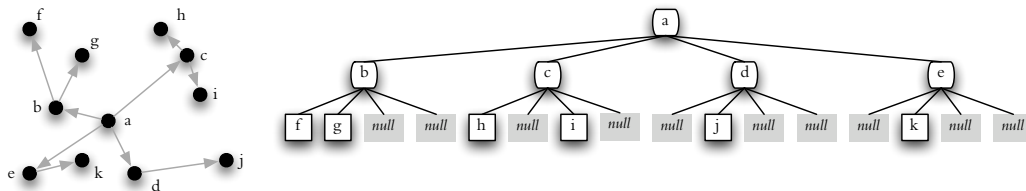


FIG. 1 – Un ensemble de points et un *quadtree* de hauteur 2.

5 Hello moto (24 points)

Vous devez écrire un logiciel pour suivre les transactions de la Bourse sur un téléphone cellulaire. Le fournisseur transmet immédiatement les transactions et le logiciel doit afficher à tout temps la liste des m transactions les plus volumineuses de la journée. (Si v_1, v_2, \dots est la liste des valeurs transmises, on veut être capable d'énumérer les m valeurs qui sont les plus grandes parmi v_1, v_2, \dots, v_i , pour tout i .) Proposez une solution efficace avec l'analyse de son temps et espace de calcul dans le cas de n transactions. Comme il s'agit d'un cellulaire, il est essentiel de minimiser le temps et l'espace requis. En particulier, il est impossible de stocker la liste de toutes les transactions de la journée.

6 Asymptotique (10 points de boni)

Trouvez l'ordre correct de croissance en 2a. Plus précisément, trouvez une fonction explicite $h(n)$ telle que $f(n) \in \Theta(h(n))$. Justifiez votre réponse.