

IFT2015 automne 2012 — Devoir 2

Miklós Csűrös

23 novembre 2012

À remettre avant 20 :15 le 3 décembre. Remettez un rapport écrit par courriel (à csuros@iro...) en format PDF. Travaillez seul.

1 Structure par induction (14 points)

Faites §1.2 ou §1.1, mais pas les deux.

1.1 Appartenance-union avec rang

Au cours on a considéré l'idée de stocker la taille des arbres créés dans une structure de données pour le problème d'appartenance-union. Dans cet exercice, on examinera une autre approche qui utilise un *rang* associé à chaque élément. Le rang donne de l'information sur la hauteur¹ de x . Le rang s'initialise à 0.

```
UNION( $x, y$ )
1  $p \leftarrow \text{FIND}(x); q \leftarrow \text{FIND}(y)$ 
2 si  $p \neq q$  alors
3   si  $\text{rang}[p] < \text{rang}[q]$ 
4   alors  $\text{id}[p] \leftarrow q$ 
5   sinon  $\text{id}[q] \leftarrow p$ ; si  $\text{rang}[p] = \text{rang}[q]$  alors  $\text{rang}[p] \leftarrow \text{rang}[p] + 1$ 
FIND( $x$ )
1 tandis que  $x \neq \text{id}[x]$  faire  $x \leftarrow \text{id}[x]$ 
2 retourner  $x$ 
```

Considérez les arbres créés par une série quelconque d'opérations `makeset`, `union` et `find`

$$\text{makeset}(1), \dots, \text{makeset}(n), \underbrace{\text{union/find}(\dots), \dots, \text{union/find}(\dots)}_{\text{autant de fois qu'on veut}}$$

sur un ensemble de n éléments.

► Démontrez que pour un arbre enraciné à x (donc $x = \text{id}[x]$), le nombre d'éléments dans l'arbre est supérieur ou égal à $2^{\text{rang}[x]}$.

Indice: preuve par induction dans le nombre d'opérations *union*

REMARQUE. Utiliser la solution avec `rang` est aussi efficace que celle avec la taille `sz` vue au cours, menant à `find` en $O(\log n)$ au pire, et en $O(\alpha(m, n))$ amorti avec compression de chemin.

¹ La hauteur d'un élément est défini dans l'arbre de pointeurs `id` comme la longueur maximale d'une série $y, \text{id}[y], \text{id}[\text{id}[y]], \dots$ qui finit par x .

1.2 Les Immortels



Les Immortels² doivent se battre entre eux en duels. Chaque Immortel x possède une *classe* $c[x]$ et une *force* $p[x]$ qui déterminent la démarche des duels selon les règles suivantes :

- (i) Pour tout Immortel x , $c[x] = 0$ et $p[x] = 1$ au début.
- (ii) Lorsque le vainqueur (x) d'un duel élimine³ son adversaire (y), il absorbe la force libérée de l'autre⁴ : $p[x] \leftarrow p[x] + p[y]$.
- (iii) Dans un duel de classes inégales, celui de classe inférieure perd (même si sa force est supérieure).
- (iv) Un duel entre deux Immortels de même classe peut mener à la victoire de l'un ou de l'autre, en augmentant le classement du vainqueur (x) : $c[x] \leftarrow c[x] + 1$.

Notez qu'en (iv), le duel finit avec la victoire de l'un ou de l'autre, changeant la force et la classe. En (iii), la force change, mais le classement ne change pas. Exemples :

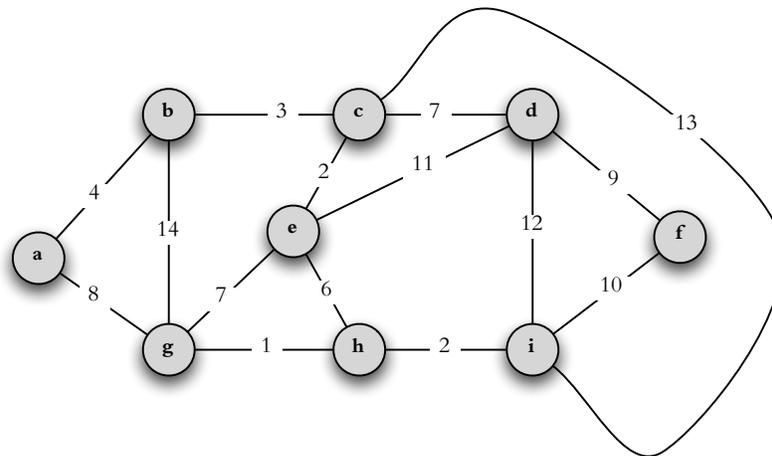
adversaires avant	adversaires après
Ramirez : $c = 4, p = 17$; Kurgan : $c = 4, p = 47$	Ramirez : mort; Kurgan : $c = 5, p = 64$
Kastagir : $c = 3, p = 12$; Kurgan : $c = 5, p = 64$	Kastagir : mort; Kurgan : $c = 5, p = 76$
MacLeod : $c = 5, p = 34$; Kurgan : $c = 5, p = 76$	MacLeod : $c = 6, p = 110$; Kurgan : mort

► Démontrez que la force d'un Immortel de classe c est au moins 2^c : $p[x] \geq 2^{c[x]}$ pour tout x .

Indice: utilisez de l'induction en duels.

2 Arbre couvrant minimal (16 points)

Considérez le graphe suivant.



a. (8 points) Montrez l'exécution de l'algorithme de Kruskal sur le graphe.

b. (8 points) Montrez l'exécution de l'algorithme de Prim sur le graphe.

(Il ne faut pas montrer les structures de données qui supportent l'algorithme, mais seulement les arêtes/sommets choisis à chaque itération.)

²Le générique masculin est utilisé dans le seul but d'alléger le texte.

³par décapitation

⁴dans un phénomène formidable appelé *quickening*