

# IFT2015 automne 2012 — Devoir 4

Miklós Csűrös

18 décembre 2012

À remettre avant 20 :15 le 21 décembre. Remettez un rapport écrit par courriel (à csuros@iro...) en format PDF. Travaillez seul.

## 4 Arbres rouge, rouge et noir (30+10 points)

Rudolf Bayer a inventé une structure de données sous le nom «symmetric binary B tree» qui est équivalente à l'arbre rouge et noir (RN). Il mentionne une généralisation qu'on considère ici. Un *arbre rouge-rouge-noir* (RRN) est un arbre binaire de recherche. Chaque nœud de l'arbre a un **rrang**. (Ne pas confondre avec le rang des arbres RN.) Les rrangs des nœuds satisfont les propriétés suivantes.

1. Pour chaque nœud  $x$  avec parent  $\text{parent}(x)$ ,

$$\text{rrang}(x) \leq \text{rrang}(\text{parent}(x)) \leq \text{rrang}(x) + 1.$$

2. Pour chaque nœud  $x$  avec un arrière-grand-parent  $y = \text{parent}(\text{parent}(\text{parent}(x)))$ ,

$$\text{rrang}(x) < \text{rrang}(y).$$

3. Pour chaque nœud externe  $x$  on a  $\text{rrang}(x) = 0$  et  $\text{rrang}(\text{parent}(x)) = 1$ .

On colorie les nœuds soit rouge soit noir : le nœud  $x$  est rouge si et seulement s'il n'est pas la racine et  $\text{rrang}(x) = \text{rrang}(\text{parent}(x))$ . Tous les autres nœuds (la racine et ceux avec  $\text{rrang}(x)+1 = \text{rrang}(\text{parent}(x))$ ) sont noirs.

### 4.1 Coloriage et rrang (10 points)

► Complétez l'énoncé du théorème 4.1 et démontrez qu'il est vrai en utilisant les propriétés de rrang. (Mettez «rouge» ou «noir» à tout )

**Théorème 4.1.** *Le coloriage d'un arbre rouge-rouge-noir est tel que*

- (i) chaque nœud externe est colorié par .
- (ii) si le parent d'un nœud  est , alors son grand-parent (s'il existe) est .
- (iii) chaque chemin reliant un nœud à un nœud externe dans son sous-arbre contient le même nombre de nœuds .

## 4.2 La hauteur d'un arbre rouge-rouge-noir (20+10 points)

On veut démontrer que la hauteur d'un arbre rouge-rouge-noir avec  $n$  nœuds internes est  $O(\log n)$ . Il n'est pas trop difficile de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 4.2.** *Pour tout nœud  $x$  d'un arbre rouge-rouge-noir, le nombre de nœuds internes dans le sous-arbre enraciné à  $x$  est au moins  $2^{\text{rrang}(x)} - 1$ .*

Vous pouvez utiliser le théorème 4.2 sans preuve pour démontrer **b** ici.

**a. Hauteur et rrang (10 points)** ► Démontrons que

$$\text{hauteur}(x) \leq 3 \cdot \text{rrang}(x) \quad (\star)$$

pour chaque nœud  $x$ . (Vous avez besoin du théorème 4.1 dans la preuve.)

**b. Taille et hauteur (10 points).** ► Utilisez le théorème 4.2 et l'équation  $(\star)$  pour démontrer que la hauteur d'un arbre RRN avec  $n$  nœuds internes est borné par  $c \lg(n + 1)$  — remplacez  $c$  par un nombre aussi petit que possible. Comparez ce résultat avec la borne sur la hauteur des arbres RN.

**c. Taille et rrang (10 points boni).** ♡ Donnez une preuve formelle au théorème 4.2.