

# IFT2015 automne 2013 — Devoir 4

Miklós Csűrös

4 novembre 2013 — remise mercredi le 13 octobre à 20 :15

Remettez un rapport écrit par email (à csuros@iro...) en format PDF. La taille de votre message ne doit pas dépasser  $2^{20}$  octets. Travaillez seul sur tous les problèmes. Le devoir vaut 50 points.

## 4.1 Tas médiane (25 points)

La *médiane* d'une collection d'éléments comparables  $x_1 \leq x_2 \leq \dots \leq x_n$  est l'élément «au milieu»  $x_{\lceil n/2 \rceil}$ . Exemples : la médiane de  $\{1, 2, 3, 4\}$  est 2 ; la médiane de  $\{5, 6, 7\}$  est 6 ; et la médiane de  $\{8, 8, 8, 9, 9\}$  est 8. ► Concevoir une structure de données qui implante les opérations `insert(x)` et `deleteMedian()`. L'opération `insert` insère un nouvel élément ; `deleteMedian` supprime et retourne la médiane. Toutes les deux opérations doivent s'exécuter en  $O(\log n)$ .

**Indice:** Utiliser un min-tas et un max-tas.

## 4.2 Encodage d'arbres (25 points)

Considérez l'encodage suivant d'un arbre binaire : énumérer les nœuds dans l'ordre préfixe (parents avant les enfants), en affichant ○ pour nœuds internes et ■ pour nœuds externes.

ordre préfixe: 1-2-a-3-b-c-4-d-5-6-e-f-g  
code: ○ ○ ■ ○ ■ ■ ○ ■ ○ ○ ■ ■ ■

**Décodage (17 points).** ► Donner un algorithme qui construit un arbre binaire à partir de son encodage. Vous pouvez assumer que l'entrée, un tableau  $C[0..l-1]$ , est valide. L'algorithme doit construire l'arbre et retourner sa racine. Chaque nœud interne  $N$  possède les variables  $N.parent$ ,  $N.left$ ,  $N.right$ , pour le parent, et les enfants gauche et droit. Les nœuds externes sont null.

**Indice:** Utiliser une méthode récursive auxiliaire qui prend le tableau  $C$  et un indice  $i$ , et construit le sous-arbre complète encodé par le segment qui débute avec indice  $i$ . La méthode peut retourner une paire  $(j, N)$  où  $j$  est l'indice après ( $j = i + \text{nombre de nœuds dans le sous-arbre}$ ) et  $N$  est la racine de sous-arbre.

**Nombre d'arbres binaires (8 points)** Soit  $t_n$  le nombre d'arbre binaires à  $n$  nœuds internes. ► Démontrer que  $t_n < \binom{2n}{n} < 4^n$  pour tout  $n > 0$ .

**Indice:** Utilisez l'encodage des arbres et les propriétés de l'encodage dans l'argument.

REMARQUE. On a  $t_0 = 1, t_1 = 1, t_2 = 2, t_3 = 5, t_4 = 14, \dots$ . On peut compter le nombre d'arbres binaires selon la taille des sous-arbres de la racine. Il y a exactement  $t_k \cdot t_{n-1-k}$  arbres binaires avec  $k$  nœuds internes dans le sous-arbre gauche de la racine (et  $(n-1-k)$  nœuds internes dans le sous-arbre droit). En conséquence, le nombre d'arbre binaires se donne par la récurrence

$$t_n = \begin{cases} 1 & \{n = 0\} \\ \sum_{k=0}^{n-1} t_k \cdot t_{n-1-k} & \{n > 0\} \end{cases}$$

La solution est  $t_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ . Par l'approximation Stirling,  $t_n \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n^3}}$ .