

# IFT2015 automne 2013 — Devoir 6

Miklós Csűrös

6 décembre 2013 — remise jeudi le 12 décembre à 20 :15

Remettez votre solution à l'exercice 6.2 par email (à csuros@iro...) en format PDF. La taille de votre message ne doit pas dépasser  $2^{20}$  octets. Travaillez seul sur tous les problèmes. Le devoir vaut 50 points, avec 10 points boni possibles.

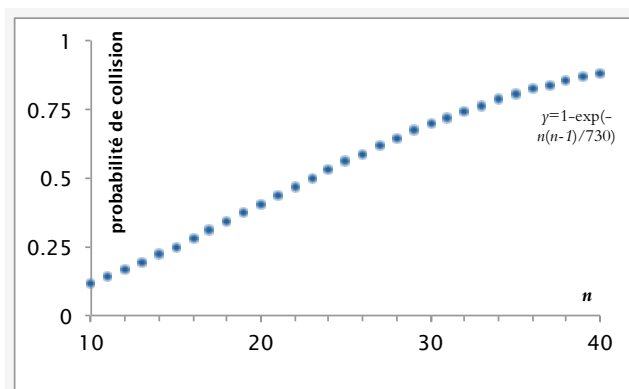
## 6.1 Jumeaux astrologiques (20 points)

Le paradoxe des anniversaires est la conséquence du fait que la probabilité d'aucune collision entre  $n$  clés choisies au hasard sur  $\{0, 1, \dots, M - 1\}$  est

$$p_0(n, M) = \left(1 - \frac{1}{M}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{M}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{M}\right) < e^{-\frac{n(n-1)}{2M}}. \quad (6.1.1)$$

Donc il y a deux personnes qui sont nées le même jour et le même mois ( $M = 365$ ) dans un groupe de  $n$  personnes avec probabilité

$$1 - p_0(n, 365) > 1 - \exp\left(-\frac{n(n-1)}{730}\right).$$



Selon la formule, il arrive avec 25–75% probabilité qu'un groupe de 15–32 contient un paire avec le même anniversaire.

► Vérifiez le paradoxe sur des équipes de sport de votre choix. Sélectionnez deux équipes professionnels de hockey, de football, etc. pour lesquels la date de

naissance des joueurs est disponible sur un site Web. Par exemple, on trouve les anniversaires des joueurs de la Ligue nationale de hockey (NHL) sous «Team Rosters». La liste doit avoir 15–32 joueurs (si l'équipe est plus gros, choisissez jusqu'à 32 membres au hasard — p.e., les premiers dans l'ordre alphabétique). Postez le résultat de votre recherche au groupe de discussion à piazza.com sous forme d'un tableau (en texte) : nom de l'équipe, URL, et liste de joueurs *dans l'ordre des anniversaires*.

Montréal Canadiens (NHL) <http://canadiens.nhl.com/club/roster.htm>  
 Raphael Diaz 9 jan  
 Brian Gionta 18 jan  
 Alex Galchenyuk 12 feb  
 ...  
 (aucun jumeaux astrologiques)

**Attention :** tout le monde doit choisir des équipes différents — si la liste de votre équipe est déjà soumise à piazza, vous devez choisir un autre.

## 6.2 Arbres rouge, rouge et noir (30+10 points)

Rudolf Bayer a inventé une structure de données sous le nom «symmetric binary B tree» qui est équivalente à l'arbre rouge et noir (RN). Il mentionne une généralisation qu'on considère ici. Un *arbre rouge-rouge-noir* (RRN) est un arbre binaire de recherche. Chaque nœud de l'arbre a un *rrang* entier. (Ne pas confondre avec le *rang* des arbres RN.) Les *rrang*s des nœuds satisfont les propriétés suivantes.

1. Pour chaque nœud  $x$  avec parent  $\text{parent}(x)$ ,

$$\text{rrang}(x) \leq \text{rrang}(\text{parent}(x)) \leq \text{rrang}(x) + 1.$$

2. Pour chaque nœud  $x$  avec un arrière-grand-parent  $y = \text{parent}(\text{parent}(\text{parent}(x)))$ ,

$$\text{rrang}(x) < \text{rrang}(y).$$

3. Pour chaque nœud externe  $x$  on a  $\text{rrang}(x) = 0$  et  $\text{rrang}(\text{parent}(x)) = 1$ .

On colorie les nœuds soit rouge soit noir : le nœud  $x$  est rouge si et seulement s'il n'est pas la racine et  $\text{rrang}(x) = \text{rrang}(\text{parent}(x))$ . Tous les autres nœuds (la racine et ceux avec  $\text{rrang}(x) + 1 = \text{rrang}(\text{parent}(x))$ ) sont noirs.

### 6.2.1 Coloriage et *rrang* (10 points)

► Complétez l'énoncé du théorème 6.2.1 et démontrez qu'il est vrai en utilisant les propriétés de *rrang*. (Mettez «rouge» ou «noir» à tout .)

**Théorème 6.2.1.** *Le coloriage d'un arbre rouge-rouge-noir est tel que*

- (i) chaque nœud externe est colorié par .
- (ii) si le parent d'un nœud  est , alors son grand-parent est .
- (iii) tous les chemins menant de la racine à un nœud externe contiennent le même nombre de nœuds .

### 6.2.2 La hauteur d'un arbre rouge-rouge-noir (20+10 points)

On veut démontrer que la hauteur d'un arbre rouge-rouge-noir avec  $n$  nœuds internes est  $O(\log n)$ . Il n'est pas trop difficile de démontrer le théorème suivant.

**Théorème 6.2.2.** *Pour tout nœud  $x$  d'un arbre rouge-rouge-noir, le nombre de nœuds internes dans le sous-arbre enraciné à  $x$  est au moins  $2^{\text{rrang}(x)} - 1$ .*

Vous pouvez utiliser le théorème 6.2.2 sans preuve pour démontrer **b** ici.

**a. Hauteur et rrang (10 points)** ► Démontré que

$$\text{hauteur}(x) \leq 3 \cdot \text{rrang}(x) \quad (\star)$$

pour chaque nœud  $x$ . (Vous avez besoin du théorème 6.2.1 dans la preuve.)

**b. Taille et hauteur (10 points).** ► Utilisez le théorème 6.2.2 et l'équation  $(\star)$  pour démontrer que la hauteur d'un arbre RRN avec  $n$  nœuds internes est borné par  $c \lg(n + 1)$  — remplacez  $c$  par un nombre aussi petit que possible. Comparez ce résultat avec la borne sur la hauteur des arbres RN.

**c. Taille et rrang (10 points boni).** ♡ Donnez une preuve formelle au théorème 6.2.2.