IFT2015 A13 — Examen Intra

Miklós Csűrös

29 octobre 2013

English translation on the last two pages.

Aucune documentation n'est permise.

L'examen comprend les questions F0–F5 (ou E0–E5) et vaut 100 points. Vous avez le droit d'écrire vos réponses en français ou en anglais.

► **Répondez à toutes les questions dans les cahiers d'examen.**

F0 Votre nom (1 point)

► Écrivez votre nom et code permanent sur tous les cahiers soumis.

F1 Croissance exponentielle (30 points)

Dans cet exercice, on explore des définitions altérnatives de croissance exponentielle pour une fonction $f\colon \mathbb{N} \mapsto [0, \infty)$. On définit alors les termes suivantes :

⋆ **fonction pure** : $f(n) = \Theta(a^n)$ avec une constante quelconque $a > 1$;

⋆ **fonction mixte** : $f(n) = 2^{\Theta(n)}$;

⋆ **fonction rapide** : $f(n) = 2^{2^{\Theta(\lg n)}}$.

(Évidemment, toute fonction pure est aussi mixte, et toute fonction mixte est rapide.)

a. (10 points) ► Démontrer qu'il existe des fonctions rapides qui ne sont pas mixtes. (Donnez un exemple.)

b. (10 points) ► Démontrer qu'il existe des fonctions mixtes qui ne sont pas pures. (Donnez un exemple.)

c. (10 points) ► Démontrer qu'une fonction est mixte si et seulement si $f(n) = \big(\Theta(1)\big)^n$.

F2 Interface TA (15 points)

► Spécifiez les deux opérations (insertion et suppression) des types abstraits pile, queue (file FIFO) et file de priorité. Expliquez comment elles changent l'ensemble d'éléments dans la file.

F3 Arbre d-aire (14 points)

Soit T un abre d-aire avec n nœuds internes et m nœuds externes pour une arité $d > 1$ quelconque. (Dans un arbre d-aire, chaque nœud interne possède exactement d enfants.) ► Démontrer que $m - 1 = (d - 1)n$.

Indice: *compter les nœuds deux fois — une fois selon le nombre d'enfants, et une fois selon le parent.*

F4 Conquérants (20 points)

Soit T un arbre binaire dans lequel chaque nœud x possède une clé entière $x.\mathsf{key}$. Dans cet exercice, un nœud interne x est **conquérant** si et seulement si pour tout nœud interne y dans son sous-arbre, $x.\mathsf{key} \leq y.\mathsf{key}$. (Un nœud interne avec deux enfants externes est conquérant par défaut.)

a. (5 points) ► Montrer que si l'arbre est dans l'ordre min-tas, alors tout nœud interne est conquérant.

b. (10 points) ► Donner un algorithme qui compte les nœuds conquérants dans un arbre binaire.

c. (5 points) ► Analysez le temps de calcul de l'algorithme (il devrait être $O(n)$ sur un arbre avec n nœuds internes).

F5 Arbre couvrant minimal préfabriqué (20 points)

Soit $G = (V, E)$ un graphe avec arêtes pondérées $w\colon E \mapsto (0, \infty)$. Supposons qu'on a un unsemble d'**arêtes fixes** $E' \subseteq E$; les arêtes fixes ne forment aucun cycle entre eux. Un arbre couvrant $T = (V, E_T)$ qui est **guidé par** E' inclut tous les sommets, ainsi que les arêtes fixes : $E' \subseteq E_T \subseteq E$.

► Donner un algorithme qui trouve l'arbre couvrant $T = (V, E_T)$ guidé par E' avec poids minimum $\sum_{e \in E_T} w(e)$, si E' est spécifié à l'entrée (comme un tableau de paires de sommets). Analyser le temps de calcul de l'algorithme.

BONNE CHANCE !

English translation

No documentation is allowed.

The examen covers questions E0–E5 (or F0–F5) and is worth 100 points. You may write your answers in English or in French.

Answer each question in the exam booklet.

E0 Your name (1 point)

▶ Write your name and *code permanent* on each booklet that you submit.

E1 Exponential growth (30 points)

This exercise explores different definitions of exponential growth for a function $f\colon \mathbb{N} \mapsto [0,\infty)$. Define the following terms :

⋆ **pure function** : $f(n) = \Theta(a^n)$ with some constant $a > 1$;

⋆ **mixed function** : $f(n) = 2^{\Theta(n)}$;

⋆ **fast-growing function** : $f(n) = 2^{2^{\Theta(\lg n)}}$.

(Clearly, every pure function is also mixed, and every mixed function is fast-growing.)

a. (10 points) ▶ Show that not all fast-growing functions are mixed. (Construct an example.)

b. (10 points) ▶ Show that not all mixed functions are pure. (Give an example.)

c. (10 points) ▶ Show that f is mixed if and only if $f(n) = \big(\Theta(1)\big)^n$.

E2 ADT interface (15 points)

▶ Specify the two fundamental operations (insertion and removal) in the abstract data types of stack, FIFO queue, and priority queue. Explain how they change the set of stored elements.

E3 d-ary tree (14 points)

Consider a d-ary tree with n internal and m external nodes for some $d > 1$. (In a d-ary tree, every internal node has exactly d children.) ▶ Prove that $m - 1 = (d-1)n$.

Hint: *Count the number of nodes in two ways : once by the number of children, and once by their parents.*

E4 Conquerors (20 points)

Let T be a binary tree where every internal node x has an integer key stored as $x.\mathsf{key}$. In this exercise, an internal node x is a **conqueror** if and only if $x.\mathsf{key} \leq y.\mathsf{key}$ for all internal nodes in the subtree rooted at x. (An internal node with two external children is a conqueror by default.)

a. (5 points) ► Argue that if the tree is in min-heap order, then every internal node is a conqueror.

b. (10 points) ► Give an algorithm that counts the number of conqueror nodes in a binary tree.

c. (5 points) ► Analyze your algorithm's running time (it should be $O(n)$ on a tree with n internal nodes).

E5 Prebuilt minimum spanning tree (20 points)

Let $G = (V, E)$ be a graph with positive edge weights $w\colon E \mapsto (0, \infty)$. Suppose that you are given a set of **fixed edges** $E' \subseteq E$ forming no cycles between themselves. A spanning tree $T = (V, E_T)$ **guided by** E' covers all vertices and includes the fixed edges : $E' \subseteq E_T \subseteq E$.

► Give an algorithm that finds a spanning tree $T = (V, E_T)$ with minimum weight $\sum_{e \in E_T} w(e)$, guided by a given edge set E' (input as an array of vertex pairs). Analyze your algorithm's running time.

GOOD LUCK !