1 Récursion

1.1 Modèles de calcul et pseudocode

Le domaine de connaissances exploré par le cours inclut la conception, l'implantation et l'analyse d'algorithmes. Un algorithme est la formalisation de la suite d'opérations à exécuter pour résoudre un problème. (Il doit terminer en un temps fini, et fournir la réponse à partir des données de l'entrée.)

MIN-ITER $(x[0..n-1])$
M1 initialiser min $\leftarrow \infty$
M2 **for** $i \leftarrow 0, \ldots, n-1$ **do**
M3 **if** $x[i] <$ min **then** min $\leftarrow x[i]$
M4 **return** min

En général, on va décrire nos algorithmes en **pseudocode**. Le syntaxe du «pseudocode» dépend de l'auteur, mais les instructions doivent être faciles à implanter en un langage de programmation.

```
int minIter(int[] x)
{
    int m = Integer.MAX_VALUE; // approximation de l'infini
    for (int i=0; i<x.length; i++)
        if (x[i]<m) m=x[i];
    return m;
}
```

Je vais illustrer l'implantation typiquement en Java. Souvent, on doit chercher un compromis entre l'algorithme conceptuel et les contraintes pratiques de l'implantation. (Ici : typage obligatoire, pas de représentation propre de ∞)

W(fr)

Lors de l'analyse d'un algorithme on caractérise son comportement en fonction de l'entrée et de la sortie. Le plus souvent, on cherche à quantifier l'efficacité de l'algorithme par sa consommation de ressources comme le temps ou le mémoire. L'analyse formel doit assumer un modèle mathématique spécifiant les **instructions élémentaires**, et le coût (temps d'exécution) associé avec chaque instruction. Les instructions élémentaires forment le vocabulaire pour décrire un algorithme. La **machine de Turing** comprend seulement un ruban «magnétique», et une tête de lecture-écriture. La gestion de mémoire est difficile avec une machine de Turing (la tête glisse par une case à la fois). Dans une **machine RAM** (*Random Access Machine* — machine à accès direct) on peut adresser le mémoire directement, et y stocker les données. L'ensemble d'instructions est proche des langages assembleurs des CPUs courants.

W(fr)

Boucles et branchements. Au niveau de langage machine, il n'y a pas de boucles en général. Le jeu d'instructions de processeurs inclut plutôt des branchements conditionnels dont on se sert pour implanter les boucles `for` ou `while`. Une itération d'une boucle `for` comprend donc l'incrémentation (ou mise à jour en général) de la variable d'itération, et l'évaluation de la condition de boucle, puis un saut selon le résultat. Pour un tableau de taille n, Algorithme MIN-ITER donc prend $(2n+1)$ comparaisons ($x[i] <$ m et $i < n$), et $(n+k+1)$ affectations où $k \leq n$ est le nombre de fois que $x[i] < x[i-1], x[i-2], \ldots, x[1]$.

Même un problème simple vaut la peine d'étudier. On peut trouver le min avec la moitié de comparaisons, par l'astuce de «sentinelles». Dans cette version, on utilise la cellule $x[n]$ pour stocker le minimum courant. Ainsi $x[n]$ sert comme sentinelle : comparison entre $x[i]$ et $x[n]$ vérifie $i < n$ en même temps.

```
MIN-SENTINELLE(x[0..], n)
S1  i ← 0; min ← +∞
S2  while i < n do
S3      min ← x[i] ; x[n] ← min
S4      do i ← i + 1 ; while x[i] > min // arrêt à i = n au pire
S5  return min
```

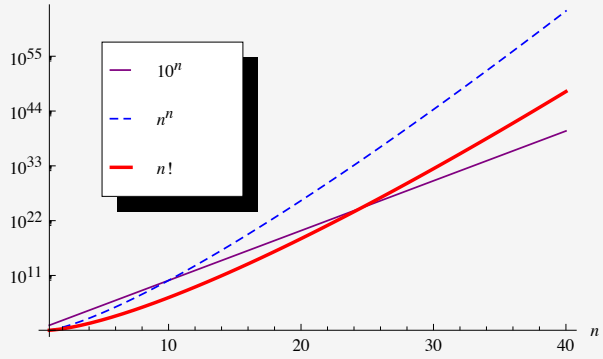
```
int minSentinelle(int[] x)
{
    int n = A.length;
    int i = 0;
    int m = Integer.MAX_VALUE;
    while (i<n-1)
    {
        int t = A[n-1]; // pour rétablir
        m = A[n-1] = A[i];
        do i++; while (A[i]>A[n-1]);
        A[n-1]=t;
    }
    if (n>0) m=Math.min(m, A[n-1]);
    return m;
}
```

1.2 Croissance de la factorielle et la formule de Stirling

Définition de la factorielle : $0! = 1$ et $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n = \prod_{k=1}^{n} k$. pour $n > 0$. W(fr)

Définition 1.1. *On définit la* factorielle $n!$ *d'un nombre naturel* $n \in \{0, 1, 2, 3 \dots\}$ *par*

$$n! = \begin{cases} 1 & \{n = 0\} \\ n \cdot (n-1)! & \{n > 0\} \end{cases}$$



La factorielle croît très rapidement — c'est une fonction **superexponentielle** : pour tout $c > 1$ fixe, il existe un $n_0(c)$ t.q.

$$c^n < n! \qquad \Big\{ n = n_0(c), n_0(c)+1, \dots \Big\} \quad (1.1)$$

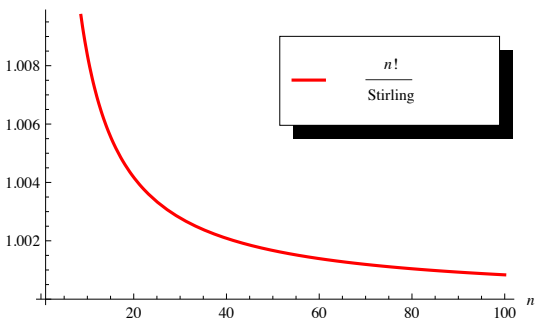
Par exemple, avec $c = 10$, $n_0(c) = 25$ suffit : $25! = 15511210043330985984000000 > 10^{25}$.

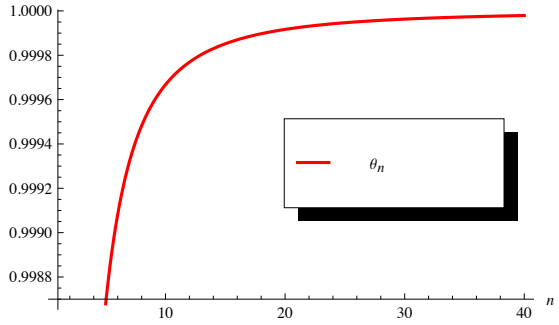
W(fr)

Théorème 1.1 (Formule de Stirling)**.** *Pour tout* $n = 1, 2, \dots$ *il existe* $0 < \theta_n < 1$ *t.q.*

$$n! = \underbrace{\sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n}_{\text{formule de Stirling}} \times \underbrace{\exp\Big(\frac{\theta_n}{12n}\Big)}_{\text{erreur de l'ordre } 1/n} .$$

On écrit alors $n! \sim \sqrt{2\pi n}\Big(\frac{n}{e}\Big)^n$ («$n!$ est asymptotiquement égale à ...»). La formule de Stirling donne une borne inférieure serrée (et donc (1.1) est correcte avec $n_0(c) = \lceil ce \rceil$) :





1.3 Pile d'exécution

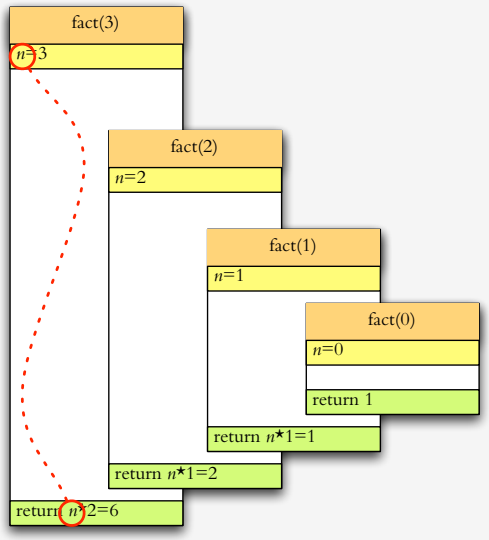
W(fr)

Définition 1.1 se traduit en un **algorithme récursif** :

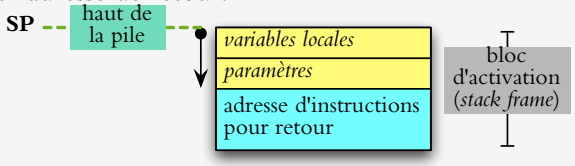
	FACT(n)	*//(calcul de n!)*
F1	**if** $n = 0$ **then return** 1	
F2	**else return** $n \times$ FACT$(n-1)$	*// appel récursif*

```
int fact(int n)
{
    if (n==0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
```

On peut vérifier que l'algorithme satisfait les règles minimales pour récursion : (1) il y a un **cas terminal**, et (2) chaque appel récursif nous rend «plus proche» à un cas terminal. En conséquence, l'algorithme finit en un nombre fini d'appels récursifs pour tout n.



Récursion existe dans des langages de haut niveau mais non pas au niveau de code machine.
Lors de l'exécution, il faut recupérer le contexte (p.e., la valeur du paramètre n) après le retour de l'appel récursif.
Il est impossible de prédire la profondeur de la récursion au temps de compilation : on doit allouer le mémoire pour les variables locales lors de l'exécution. Pour cela, on utilise une **pile d'exécution**. Lors de l'activation d'une procédure, un bloc est alloué sur la pile pour stocker les paramètres, les variables locales et l'adresse de retour.



```
int fact(int n)
{
    if (n==0) return 1;
    else return n*fact(n-1);
}
```

Dans le code machine, SP dénote le pointeur de pile (*stack pointer*). Un bloc d'activation contient deux emplacements en mémoire : n est stocké à l'adresse SP $-$ 1, et l'adresse de retour se trouve à SP $-$ 2. r_0 et r_1 sont des registres du CPU. Registre r_0 est utilisé pour retourner une valeur.

code machine imaginaire pour `fact`

```
                M1  load r1, [SP − 1]      // (r1 contient n)
                M2  jumpnonzero r1, M6     // si r1 ≠ 0, continuer à M6
                M3  load r0, 1             // (valeur retournée en r0)
                M4  sub SP, 2              // (rétablissement de la pile)
cas de base     M5  jump [SP]              // continuer à l'adresse de retour stocké
                M6  sub r1, 1              // (r1 ← r1 − 1)
                M7  store M11, [SP]        // (stocker adresse de retour)
                M8  add SP, 2              // (allocation de frame)
                M9  store r1, [SP − 1]     // (argument de l'appel)
                M10 jump M1                // (exécution de l'appel)
cas récursif    M11 mul r0, [SP − 1]       // (valeur retournée en r0)
                M12 sub SP, 2              // (rétablissement de la pile)
                M13 jump [SP]
```

Variables. *variable = abstraction d'un emplacement en mémoire* [John von Neumann]
Attributs d'une variable : nom + adresse (lvalue) + valeur (rvalue) + type + portée

Variable locale (paramètres de fonction inclus) : adresse est rélatif au bloc d'activation ⇒ chaque copie activée de la fonction possède ses propres variables locales.

W(fr)

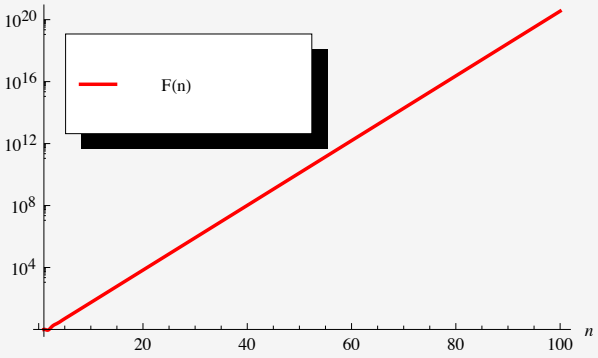
1.4 Nombres Fibonacci

Définition 1.2. *On définit les* ***nombres Fibonacci*** $F(n)$ *pour* $n = 0, 1, 2, \ldots$:

$$F(0) = 0; \quad F(1) = 1; \quad F(n) = F(n-1) + F(n-2) \qquad \{n > 1\} \tag{1.2}$$

Formule de Binet. Les racines de l'équation de récurrence homogène $[x^n = x^{n-1} + x^{n-2}]$ sont $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\cdots$ et $\bar{\phi} = 1 - \phi = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618\cdots$. La solution spécifique se trouve par la solution des équations $F(0) = 0 = a\phi^0 + b\bar{\phi}^0$ et $F(1) = 1 = a\phi^1 + b\bar{\phi}^1$. On obtient $a = -b = 5^{-1/2}$, donc

$$F(n) = \frac{\phi^n - \bar{\phi}^n}{\sqrt{5}}. \tag{1.3}$$



Dans d'autres mots, $F(n)$ a une croissance exponentielle. Comme $\left|\bar{\phi}^n/\sqrt{5}\right| < 1/2$ pour tout $n \geq 0$ et $F(n)$ est entier, on voit aussi que $F(n)$ égale à $\phi^n/\sqrt{5}$, arrondi au plus proche entier :

$$F(n) = \left\lfloor \phi^n/\sqrt{5} + 1/2 \right\rfloor.$$

1.5 Programmation dynamique

Définition 1.2 se traduit en un algorithme récursif très inefficace car les sous-problèmes se chevauchent.

```
    FIBO(n)              //(algorithme inefficace pour calculer F(n))
E1  if n ∈ {0,1} then return 1
E2  else return FIBO(n−1) + FIBO(n−2)   // appel récursif
```

```
int fibo(int n)
{
    if (n==0 || n==1) return 1;
    else return fibo(n-1)+fibo(n-2);
}
```

⇒ règle (3) d'algorithmes récursifs : identifier des sous-problèmes distincts

Pour calculer $F(n)$ de façon efficace, on utilise plutôt la **programmation dynamique** (approche bottom-up) que l'implantation directe de la récurrence (1.3) (approche top-down).

```
    FIB(n)                                          // (bottom-up)
T1  F ← 0; F_{-1} ← 1
T2  while n > 0 do
T3      t ← F + F_{-1}
T4      F_{-1} ← F; F ← t; n ← n − 1
T5  return F
```

W(fr)

1.6 Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide trouve le plus grand commun diviseur de deux entiers positifs.

```
    GCD(a, b) // {b ≤ a}
E1  if b = 0 then return a
E2  else return GCD(b, a mod b);
```

```
int gcd(int a, int b)
{   assert (b<=a && b>=0);
    if (b==0) return a;
    else return gcd(b, a%b);
}
```

Le théorème suivant avec Eq. (1.3) montre que l'algorithme d'Euclide prend un temps logarithmique en b.

Théorème 1.2. *Soit n le plus grand entier pour lequel $F(n) \leq b < F(n+1)$ dans l'appel à l'algorithme d'Euclide. Alors, l'algorithme exécute au plus $(n-1)$ récursions.*

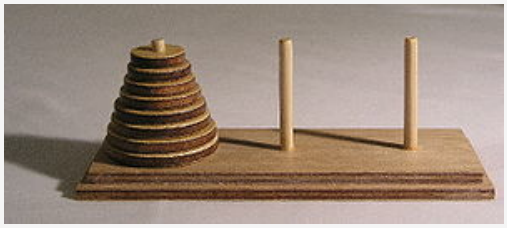
Démonstration. On définit n_i pour $i = 1, 2, \ldots$ comme l'indice du nombre Fibonacci pour lequel $F(n_i) \leq a < F(n_i + 1)$ au début de récursion i ($i = 1$ dans l'appel initiel). Si $b < F(n_i)$, on a immédiatement $n_{i+1} \leq n_i - 1$ dans l'appel suivant. Si $b \geq F(n_i)$, alors $a \bmod b \leq a - b < F(n_i - 2)$. Donc, après 2 appels, on a $a < F(n_i - 2)$ et $n_{i+2} \leq n_i - 2$. En conséquence, le nombre d'appels est borné par $n_1 - 2$: avec $n_i \leq 3$, on a $0 \leq b \leq a < 3$ et l'algorithme se termine en 1 appel au plus. Pour la borne plus serrée du théorème, on considère le b initiel : $F(n_2) \leq b < F(n_2 + 1)$ (affectation $a \leftarrow b$ lors du premier appel), et l'algorithme finit en $n_2 - 1$ appels au plus. ■

REMARQUE. La borne de théorème 1.2 montre le pire cas : c'est avec $a = F(n+1)$, $b = F(n)$. Avec un tel choix, $a \bmod b = F(n-1)$, et l'algorithme exécute $n-2$ appels pour arriver à $a = F(3) = 2, b = F(2) = 1$ et se terminer après un dernier appel de plus où b devient 0 et on retourne la réponse $a = 1$.

1.7 Tours de Hanoï

W(fr)

Parfois, la récursion nous fournit des solutions très simples à des problèmes complexes.



Dans le jeu de Tours de Hanoï, il faut déplacer des disques à diamètres différents $(1, 2, \ldots, n)$ d'une tour de départ à une tour d'arrivée en passant par une tour intermédiaire, tout en respectant Règles 1 et 2 ci-dessous. Opération $\textsc{Move}(i \to j)$ déplace le disque en haut de tour i à tour j. Les disques sont en ordre décroissant au début, et il y a trois tours.

Règle 1. On ne peut déplacer plus d'un disque à la fois. Un déplacement consiste de mettre le disque supérieur sur une tour au-dessus des autres disques (s'il y en a).

Règle 2. On ne peut placer un disque que sur un autre disque plus grand ou sur un emplacement vide.

Une solution simple est fournie en définissant une procédure récursive $\textsc{Hanoi}(i \curvearrowright k \curvearrowright j, n)$ qui déplace les n disques supérieurs sur tour i vers tour j en utilisant la tour intermédiare k.

```
    HANOI(i ↷ j ↷ k, n)
H1  if n ≠ 0 then
H2      HANOI(i ↷ j ↷ k, n − 1)
H3      MOVE(i → j)
H4      HANOI(k ↷ i ↷ j, n − 1)
```

Théorème 1.3. *La procédure* HANOI *performe* $2^n - 1$ *déplacements pour arranger* n *disques.*

Démonstration. La preuve est par induction en n. Soit $D(n)$ le nombre de déplacements (Ligne H3).

Cas de base : on vérifie que le théorème est valide pour $n = 0$ car $D(0) = 0 = 2^0 - 1$ et l'arrangement final est correct.

Hypothèse d'induction : supposons que le théorème est vrai pour un $n \geq 0$ quelconque.

Cas inductif : par inspection de l'algorithme, on a $D(n+1) = 2D(n) + 1$. En se servant de l'hypothèse d'induction, on a $D(n+1) = 2 \cdot \left(2^n - 1\right) - 1 = 2^{n+1} - 1$. On voit aussi que l'arrangement final est correct pour les $(n+1)$ disques. Donc le théorème est correct pour $n + 1$.

En conséquence, le théorème est correct pour tout $n = 0, 1, 2, \ldots$. ■