6 Hachage

6.1 Table de symboles

Type abstrait **table de symboles** (*symbol table*) ou **dictionnaire** : ensemble d'objets avec clés. Typiquement (mais pas toujours !) les clés sont comparables (abstraction : nombres naturels).

Opération principale :

⋆ search(k) : recherche d'un élément à clé k ← peut être fructueuse ou infructueuse.

Si dictionnaire modifiable («dynamique») :

⋆ insert(x) : insertion de l'élément x (clé+info)

⋆ delete(k) : supprimer élément avec clé k

Avec clés uniques : search(k) retourne l'élément x avec clé k si un tel existe, ou null sinon ; insert(x) *remplace* l'élément avec la même clé, si un tel est déjà présent dans l'ensemble.

Implémentations. On a vu dés implémentations naïves : par liste chaînée (non-triée) ou tableau (trié ou non-trié). Notre structure pour implanter le TA table de symboles d'une façon tres efficace : **tableau de hachage**. (Plus tard on examinera les arbres de recherche, aussi utilisées souvent pour implémenter le TA.)

Applications. recherche sur Web (mot → list de pages avec mot), dans une banque de données ou texte (mot → pages d'occurrence) ; génomique (BLAST : recherche des occurrences d'une séquence moléculaire) ; compilateurs/interpreteurs (variables, méthodes, procédures, ...) ; réseautage (nom → addresse IP).

6.2 Inverted index

Supposons que les clés sont des entières $\mathcal{U} = 0, 1, 2, \ldots, M-1$. On peut alors utiliser un tableau $\mathsf{T}[0..M-1]$, et mettre l'élément avec clé k dans la k-ème cellule. Opérations en $O(1)$ mais mémoire de taille $\Theta(M)$. N'est utile que si M n'est pas trop grand.

Clés multiples ? On peut facilement accomoder des éléments avec clés multiples (p.e., personnes avec date d'anniversaire — mois, jour — comme clé) : mettre des listes dans les cellules.

6.3 Hachage

On peut accommoder des clés non-entières ou d'un espace de clés $\mathcal{U}$ trop grand. On utilise une **fonction de hachage** $h\colon \mathcal{U} \mapsto \{0, 1, \ldots, M-1\}$ pour définir l'emplacement d'une clé $k \in \mathcal{U}$ dans le tableau.

6.3.1 Collisions et fonctions de hachage

Définition 6.1. *Deux clés k, k' sont **en collision** si $h(k) = h(k')$.*

Hachage uniforme. On veut assurer que $h(k)$ est uniforme : il faut une fonction h telle que

⋆ [uniformité] $h(k) = i$ avec probabilité $1/M$ pour tout $i = 0, 1, 2, \ldots, M-1$.

⋆ [indépendance] pour plusieurs clés $\big(k_1, k_2, \ldots, k_m\big)$ $\big(h(k_1), \ldots, h(k_m)\big)$ a une distribution uniforme.

Mauvaise nouvelle : mais même avec une distribution uniforme, on aura des collisions quand $M = o(n^2)$.

Théorème 6.1. ***[Birthday paradox]*** *Avec des clés uniformement distribués, on a au moins une collision avec probabilité* $> 1/2$ *quand* $n > 1.18\sqrt{M}$.

Démonstration. Probabilité d'aucune collision : $p = 1\left(1 - \frac{1}{M}\right)\left(1 - \frac{2}{M}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{M}\right) < \prod_{i=0}^{n-1} e^{-i/M} = \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2M}\right)$. Avec $n/\sqrt{M} > \sqrt{2\ln 2} = 1.177\cdots$, on a $p < 1/2$. ■

Comment choisir une fonction de hachage ? On ne connaît pas la distribution des clés ! Heureusement, il existe des méthodes qui mènent à une distribution proche à uniforme dans la grande majorité d'applications.

Méthode de la division. On utilise $h(k) = k \bmod M$. Il faut bien choisir M pour éviter la réduction de l'espace de valeurs de hachage à cause des clés non-aléatoires :

- ⋆ éviter $M = 2^j$: les derniers j bits déterminent h
- ⋆ éviter $M = 10^j$: les derniers j chiffres d'une clé décimale déterminent h

⇒ choisir un nombre premier loin de 2^j et 10^j.

Méthode de la multiplication. On utilise $h(k) = \lfloor M\{\gamma k\}\rfloor$ avec une valeur flottante γ (partie fractionnaire : $\{x\} = x - \lfloor x\rfloor$). La dispersion des valeurs de hachage dépend principalement de γ. Un bon choix est $\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ici, on choisit une taille $M = 2^p$ pour un calcul rapide avec opérations entières (multiplication, décalage de bits). Calcul rapide pour un entier k representé sur w bits [p.e., $w = 32$ pour `int` de Java] : écrire $\gamma = A/2^w$, alors `h = (A*k) >>> (w-p)` (`>>>` dénote décalage de bits vers la droite).

Clés composées — hachage universel. On a une clé de r caractères : $k = \langle k_1, k_2, \ldots, k_r\rangle$ (p.e., `String`). Fonction de hachage $h^{(r)}(k) = \left(\sum_{i=1}^{r} h_i(k_i)\right) \bmod M$ avec des fonctions de hachage $h_i(x)$ choisies «au hasard». En pratique, on utilise une règle approximative simple comme $h_i(x) = a^{r-i} \cdot x$ (où a est un nombre premier) : initialiser $h \leftarrow 0$; **for** $i \leftarrow 1, 2, \ldots, r$ **do** $h \leftarrow (a \cdot h + k_i) \bmod M$.

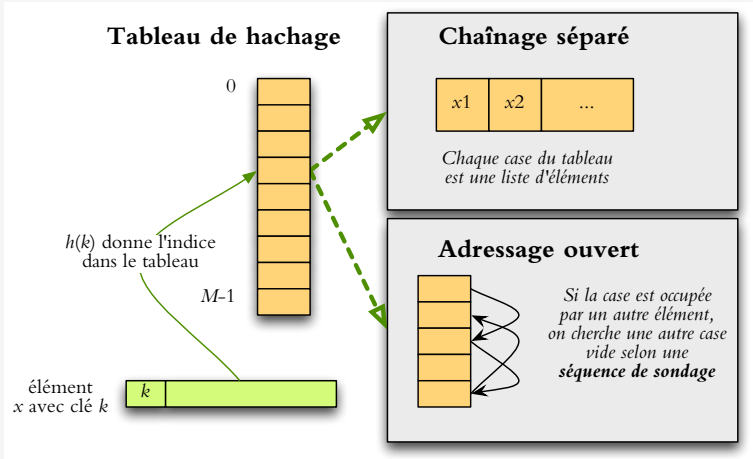
P.e., **hashcode**() de `String` (Java) utilise $a = 31$ et $M = 2^{32}$ (32-bit entiers).

```
class String {
    ...
    final char[] value; final int offset; final int
    ...
    public int hashCode()
    {
        ...
        int hashCode = 0;
        int limit = count + offset;
        for (int i = offset; i < limit; i++) hashCode = hashCode * 31 + value[i];
        return hashCode;
    }
```

6.4 Tableau de hachage

W(fr)

Qu'est-ce qu'on fait lors des collisions ?



En **chaînage séparé**, chaque case du tableau contient une liste d´éléments avec clés qui donnent la même valeur de hachage.
En **adressage ouvert**, tous les éléments sont placés directement dans le tableau. La suite de cases à essayer pour le placement est définie par une séquence de sondage qui commence avec l'indice $h(k)$.

Un tableau de hachage performe bien dans **le cas moyen** — dans le pire cas, la performance est comme pour une liste chaînée ($\Theta(n)$ pour insérer ou rechercher). Idéalement, on veut utiliser une fonction de hachage qui mène à une **distribution uniforme** de $h(k)$. La performance moyenne est déterminée par la **facteur de charge** $\alpha = n/M$ quand on a n éléments dans le tableau.

6.5 Chaînage séparé

On utilise une liste chaînée (chaque case donne la tête de sa liste), ou un tableau pour stocker les éléments à chaque indice. Les éléments sont non-triés en général (surtout si les clés ne sont pas comparables), parce que α (longueur moyenne d'une liste) reste assez petite dans toutes les implantations efficaces.

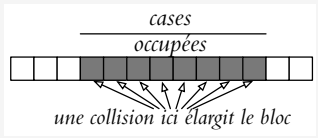
6.6 Adressage ouvert

En adressage ouvert, on fait la **sondage** (*probing*) d'une séquence de positions : dépend de la clé à insérer. L'adressage ouvert ne permet pas $\alpha > 1$. On examine les cases $h_0(k)$, $h_1(k)$, ...avec une fonction f : $h_i(k) = h(k) + f(i,k) \bmod M$. La fonction f représente la **stratégie de résolution de collision**.

Méthodes de sondage :

⋆ sondage linéaire $h_i(k) = h(k) + ic$. Cela ne dépend pas de la clé k, $c = 1$ est typique.

⋆ double hachage $h_i(k) = h(k) + ih'(k)$ avec fonction de hachage auxiliaire h'



Sondage linéaire. (*Linear probing*) : $h(k), h(k)+1, h(k)+2, \ldots$. Mène à la **grappe forte** (*primary clustering*) —blocs de cases occupées.

Double hachage. Généralisation de sondage linéaire : $h(k), h(k)+c, h(k)+2c, h(k)+3c, \ldots$. Ici, c dépend de la clé k : $c = h'(k)$. Cette méthode est très proche d'une résolution idéale. Exemples : $h'(x) = 1 + x \bmod M'$ avec $M' < M$ ou $h'(x) = M' - (x \bmod M')$.

Suppression. On utilise souvent une **approche paresseuse** (*lazy deletion*) : suppression = remplacement par une sentinelle. search doit passer les sentinelles, insert peut les recycler.