

# Arbres AVL

AVL : Adelson-Velsky et Landis (1962)

**Déf.** Un arbre binaire est un arbre AVL ssi à chaque nœud, la hauteur du sous-arbre gauche et la hauteur du sous-arbre droit diffèrent par 1 au plus.

(hauteur d'un sous-arbre vide = -1.)

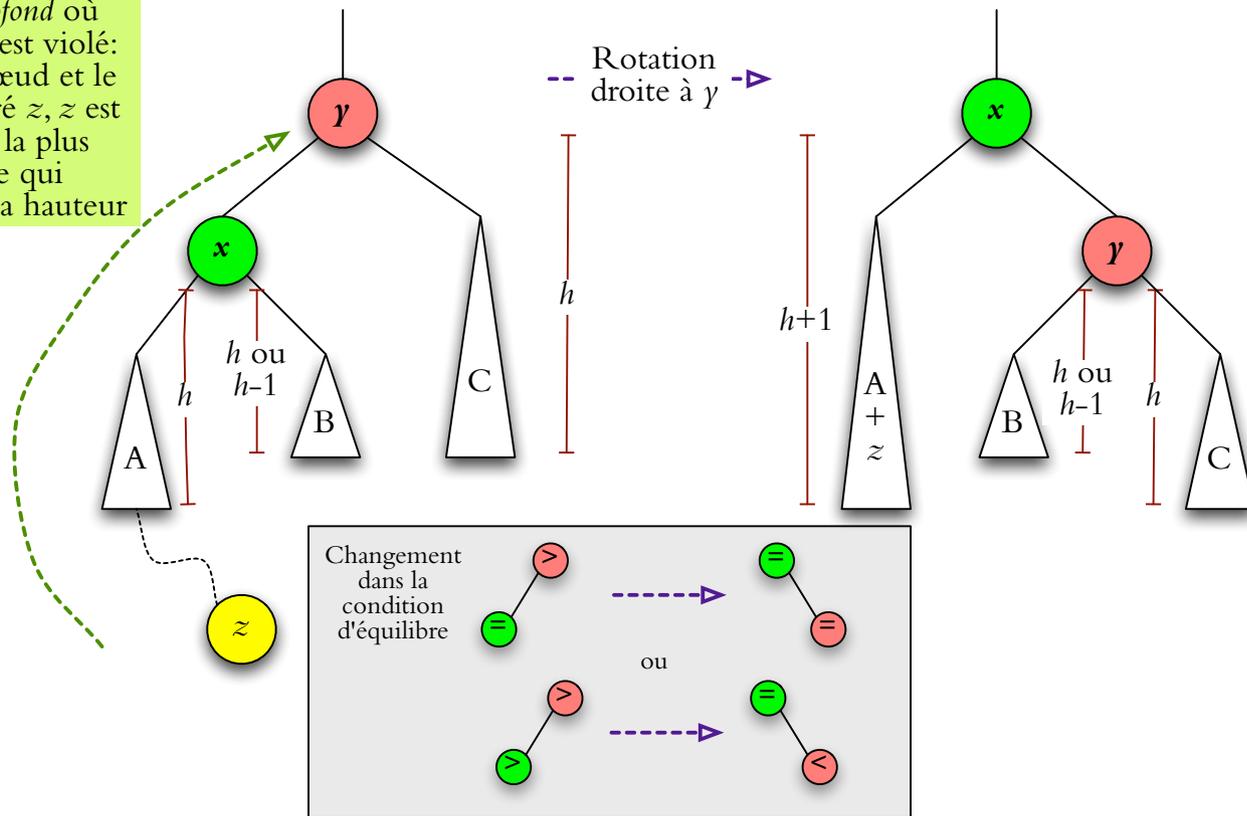
On va donc stocker la hauteur de chaque sous-arbre à sa racine.

**Remarque.** On peut calculer la hauteur de tous les nœuds en parcours post-fixe.

# Insertion dans arbre AVL

Insertion dans le sous-arbre gauche d'un enfant gauche : une rotation si nécessaire

monter vers la racine pour trouver le nœud le plus profond où l'équilibre est violé: entre ce nœud et le nœud inséré  $z$ ,  $z$  est la feuille la plus distante qui détermine la hauteur



(cas symétrique si sous-arbre droit d'un enfant droit ; autres cas plus compliqués)

# Hauteur d'un arbre AVL

Soit  $N(h)$  le nombre minimal de nœuds dans un arbre AVL de hauteur  $h \geq 0$ .  
On a  $N(0) = 1$ ,  $N(1) = 2$ .

**Lemme.** Pour tout  $h > 1$ ,

$$N(h) = N(h - 1) + N(h - 2) + 1.$$

**Lemme** Il existe  $c > 0$  tel que  $N(h) \leq c\phi^h - 1$  pour tout  $h \geq 0$  où  $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . (Notez que  $\phi^2 = \phi + 1$ .)

**Preuve** La constante  $c$  sera spécifiée plus tard. Supposons que  $N(k) \leq c\phi^k - 1$  pour tout  $0 \leq k < h$ . Alors,

$$N(h) = N(h - 1) + N(h - 2) + 1 \leq c\phi^{h-1} + c\phi^{h-2} - 1 = c\phi^h - 1.$$

Si on choisit  $c = 2$ , la borne est correcte pour  $h = 0, 1$  et donc elle est correcte pour tout  $h$ .  $\square$

# Hauteur d'un arbre AVL (cont)

Donc un arbre AVL sur  $n$  nœuds est de hauteur

$$h \leq \log_{\phi} \frac{n+1}{2} = \frac{\lg(n+1) - 1}{\lg \phi} \approx 1.44 \lg n \in O(\log n).$$