

# IFT2015 Hiver 2009 — Devoir 1

Miklós Csűrös

21 janvier 2009

À remettre au cours le 2 février. Remettez un rapport écrit. Un rapport soumis par courriel (à csuros@iro...) en format PDF vaut 3 points de boni.

## 1 Appartenance-union avec rang (30 points)

Au cours on a considéré l'idée de stocker la taille des arbres créés dans une structure de données pour le problème d'appartenance-union. Dans cet exercice, on examinera une autre approche qui utilise un *rang* associé à chaque élément. Le rang donne de l'information sur la hauteur de chaque arbre. En fait, c'est toujours une borne supérieure sur la hauteur<sup>1</sup> de  $x$ .

```
MAKESET( $x$ )
1  $\text{id}[x] \leftarrow x$ 
2  $\text{rang}[x] \leftarrow 0$ 

UNION( $x, y$ )
1  $p \leftarrow \text{FIND}(x)$ ;  $q \leftarrow \text{FIND}(y)$ 
2 si  $p \neq q$  alors
3   si  $\text{rang}[p] < \text{rang}[q]$ 
4   alors  $\text{id}[p] \leftarrow q$ 
5   sinon  $\text{id}[q] \leftarrow p$ ; si  $\text{rang}[p] = \text{rang}[q]$  alors  $\text{rang}[p] \leftarrow \text{rang}[p] + 1$ 

FIND( $x$ )
1 tandis que  $x \neq \text{id}[x]$  faire  $x \leftarrow \text{id}[x]$ 
2 retourner  $x$ 
```

---

<sup>1</sup> La hauteur d'un élément est défini dans l'arbre de pointeurs  $\text{id}$  comme la longueur maximale d'une série  $y, \text{id}[y], \text{id}[\text{id}[y]], \dots$  qui finit par  $x$ .

Considérez les arbres créés par une série quelconque d'opérations `makeiset`, `union` et `find`

$$\text{makeiset}(1), \dots, \text{makeiset}(n), \underbrace{\text{union/find}(\dots), \dots, \text{union/find}(\dots)}_{\text{autant de fois qu'on veut}}$$

sur un ensemble de  $n$  éléments.

**a. (10 points)** Démontrez que pour tout  $x$ , on a  $\text{rang}[x] \leq \text{rang}[\text{id}[x]]$  avec inégalité stricte si et seulement si  $x \neq \text{id}[x]$ . Indice : preuve par induction dans le nombre d'opérations `union`.

**b. (10 points)** Démontrez que pour un arbre enraciné à  $x$  (donc  $x = \text{id}[x]$ ), le nombre d'éléments dans l'arbre est supérieur ou égal à  $2^{\text{rang}[x]}$ . Indice : preuve par induction dans le nombre d'opérations `union`.

**c. (10 points)** Démontrez qu'une opération `find` prend  $O(\log n)$  temps. Indice : utilisez les lemmes de a. et b.

## 2 Oh, la notation (30 points)

**a. (15 points)** Démontrez, en utilisant la définition de  $\Theta$ , que

$$n^3 + 2n^2 + 8 \in \Theta(n^3)$$

et que

$$n^{3+1/\lg n} \in \Theta(n^3).$$

**b. (10 points)** Trouvez la solution asymptotique à la récurrence suivante :

$$T(n) = \begin{cases} T(n-1) + O(1) & \text{si } n \text{ est un nombre premier,} \\ T(n-2) + O(1) & \text{si } n > 1 \text{ n'est pas un nombre premier,} \\ O(1) & \text{si } n = 1. \end{cases}$$

Donnez votre réponse en notation  $\Theta(\cdot)$  avec une preuve détaillée en utilisant la définition de  $\Theta(\cdot)$ .

**c. (5 points)** Est-ce que  $O(n^3) \setminus O(n^2) = \Theta(n^3)$ ? (« $\setminus$ » dénote la soustraction sur des ensembles.) Justifiez votre réponse.