

Ackerman

Ackerman $A(i, j)$ avec $i, j \geq 1$

$$A(i, j) = \begin{cases} 2^j & \text{si } i = 1; \\ A(i - 1, 2) & \text{si } j = 1 \text{ et } i \geq 2 \\ A(i - 1, A(i, j - 1)) & \text{si } i, j \geq 2 \end{cases}$$

(définition de Tarjan)

Ackerman inverse ($m \geq n \geq 1$)

$$\alpha(m, n) = \min\{i : A(i, \lfloor m/n \rfloor) \geq \lg n\}$$

c'est une fonction de croissance très lente

$\alpha(m, n) \leq 3$ pour tout $n < 65536$ et $\alpha(m, n) \leq 4$ pour tout $n < 2^{2^{\dots^2}}$

(exponentiation 16 fois)

Logarithme itéré

composition :

$$\lg \lg n = \lg(\lg(n))$$

logarithme itéré

$$\lg^* n = \begin{cases} 0 & \text{si } n \leq 1 \\ 1 + \lg^*(\lg n) & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

c'est une fonction très lente (mais à croissance monotone)

$\lg^* n \leq 5$ pour tout $n \leq 2^{65536}$

Notation asymptotique

«Croissance essentielle» d'une fonction :

$3n^2 - 2n + 1$ est de la même croissance essentielle que $12n^2 + 3 \lg n$

Déf. $f(n) \in O(g(n))$ si et seulement si il existe $N \in \mathbb{N}$ et $c \in \mathbb{R}^+$ t.q. pour tout $n \geq N$,

$$f(n) \leq c \cdot g(n).$$

La notation $\dots O(f(n)) \dots = \dots O(g(n)) \dots$ veut dire qu'en remplaçant « $O(f(n))$ » à la gauche par n'importe quelle fonction $h(n) \in O(f(n))$, il existe une fonction $h'(n) \in O(g(n))$ telle qu'elle peut remplacer « $O(g(n))$ » à la droite pour que l'équation soit vraie

exemple : $n(n+1)/2 + O(\log n) = n^2/2 + O(n)$

Exemples...

$2n + 1$: linéaire $O(n)$

$3n^2 + \lg n$: quadratique $O(n^2)$

$2^n + n$: exponentiel (2^n)

$7 \cdot 3^n$: exponentiel $O(3^n)$ mais pas $O(2^n)$

$4n \log_7 n + n$: $O(n \log n)$

$3 \cdot (\log_5 n)^2$: $O(\log^2 n)$

Notez que $2n + 3 \in O(0.0001n + \log_7 n - \sqrt{n})$ est correct par notre définition.

En général, on choisit la fonction «la plus simple» dans les parenthèses de $O(\cdot)$ [ou o, Ω, Θ]

$\Rightarrow$ dans des devoirs, exercices, etc, seulement la forme la plus simple vaut 100% de crédit.

Calculer avec grand O

Thm Si $f_1(n) \in O(g_1(n))$ et $f_2(n) \in O(g_2(n))$, alors

$$f_1(n) + f_2(n) \in O\left(g_1(n) + g_2(n)\right)$$

$$f_1(n) \cdot f_2(n) \in O\left(g_1(n) \cdot g_2(n)\right).$$

Thm Si $f(n) \in O(g(n))$ alors $f(n) + g(n) \in O(g(n))$.

Exemple :

$$\begin{aligned} & \left(n + O(\sqrt{n})\right) \cdot \left(\sqrt{n} + O(1)\right) \\ &= n\sqrt{n} + O(n) + O(n) + O(\sqrt{n}) = n^{3/2} + O(n) = O(n^{3/2}) \end{aligned}$$

D'autres notions asymptotiques

Déf. $f(n) \in \Omega(g(n))$ si et seulement si $g(n) \in O(f(n))$.

Déf. $f(n) \in \Theta(g(n))$ si et seulement si $f(n) \in O(g(n)) \cap \Omega(g(n))$.

Déf. $f(n) \in o(g(n))$ si et seulement si pour tout $c \in \mathbb{R}^+$ il existe $N(c) \in \mathbb{N}$ t.q. pour tout $n \geq N(c)$,

$$f(n) < c \cdot g(n)$$

Thm $\ln n \in o(n^\epsilon)$ pour tout $\epsilon > 0$

Une astuce avec lim

Thm. $f(n) \in o(g(n))$ ssi

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = 0.$$

Thm. S'il existe $c \in \mathbb{R}^+$ t.q.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c,$$

alors $f(n) \in \Theta(g(n))$.

Exemple : récurrence simple

Pour trier la vecteur $v[1..n]$:

1. rechercher le max
2. récurrence sur la reste

Nombre de comparaisons : $C(n) = C(n-1) + n - 1$ si $n > 1$, et $C(1) = 0$

Solution :

$$\begin{aligned} C(n) &= C(n-1) + (n-1) = C(n-2) + (n-2) + (n-1) = \dots \\ &= \sum_{i=0}^{n-1} i = n(n-1)/2 \end{aligned}$$

Temps de calcul : $T(n) = T(n-1) + O(n)$; solution $T(n) = O(n^2)$

Preuve : par induction, en utilisant la définition de O .

Exemple : récurrence 2

$$T(n) = T(n/2) + O(1) ; \text{ solution } T(n) = O(\log n)$$

Exemple : récurrence pour tri

Pour trier la vecteur $v[1..n]$:

1. trier les deux moitiés
2. fusionner les deux vecteurs triées

Temps de calcul : $T(n) = 2 \cdot T(n/2) + O(n)$

Récurrence de base : $C_n = 2C_{n/2} + n; C_1 = 1$

solution : $n(1 + \lg n)$ quand $n = 2^k$

Donc on veut démontrer $T(n) = O(n \log n)$

Preuve : par induction, en utilisant la définition de O