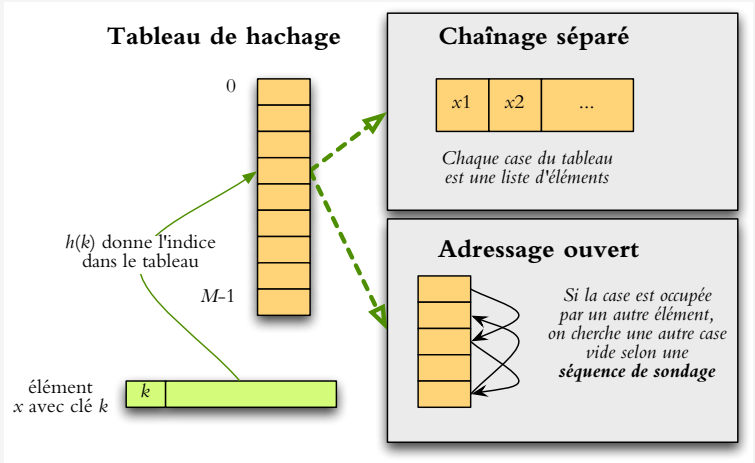
IFT2015 hiver 2010 — Notes de cours

Miklós Csűrös

7 avril 2010

17 Hachage

Une autre structure pour implanter le TA table de symboles : **tableau de hachage**.



On utilise une **fonction de hachage** $h\colon \mathcal{U} \mapsto \{0, 1, \ldots, M-1\}$ pour définir l'emplacement d'une clé $k \in \mathcal{U}$ dans le tableau.
En **chaînage séparé**, chaque case du tableau contient une liste d´éléments avec clés qui donnent la même valeur de hachage.
En **adressage ouvert**, tous les éléments sont placés directement dans le tableau. La suite de cases à essayer pour le placement est définie par une séquence de sondage qui commence avec l'indice $h(k)$.

Un tableau de hachage performe bien dans **le cas moyen** — dans le pire cas, la performance est comme pour une liste chaînée ($\Theta(n)$ pour insérer ou rechercher). Idéalement, on veut utiliser une fonction de hachage qui mène à une **distribution uniforme** de $h(k)$. La performance moyenne est déterminée par la **facteur de charge** $\alpha = n/M$ quand on a n éléments dans le tableau.

17.1 Chaînage séparé

On utilise une liste chaînée (chaque case donne la tête de sa liste), ou un tableau pour stocker les éléments à chaque indice. Les éléments sont non-triés en général (surtout si les clés ne sont pas comparables), parce que α (longueur moyenne d'une liste) reste assez petite dans toutes les implantations efficaces.

17.2 Fonctions de hachage

Méthode de la division. On utilise $h(k) = k \bmod M$. Il faut bien choisir M pour éviter la réduction de l'espace de valeurs de hachage à cause des clés non-aléatoires.

- ⋆ éviter $M = 2^j$: les derniers j bits déterminent h
- ⋆ éviter $M = 10^j$: les derniers j chiffres d'une clé décimale déterminent h
- ⋆ éviter $M = 3j$: h pour les permutations d'une clé binaire diffèrent par multiples de 3

$\Rightarrow$ choisir un nombre premier loin de 2^j et 10^j.

Méthode de la multiplication. On utilise $h(k) = \lfloor M\{\gamma k\} \rfloor$ avec une valeur flottante γ (partie fractionnaire : $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$). La dispersion des valeurs de hachage dépend principalement de γ. Un bon choix est $\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ici, on choisit une taille $M = 2^p$ pour un calcul rapide avec opérations entières (multiplication, décalage de bits).

Hachage universel. Clé de r caractères : $k = \langle k_1, k_2, \ldots, k_r \rangle$. Fonction de hachage $h^{(r)}(k) = \Big(\sum_{i=1}^{r} h_i(k_i)\Big) \bmod M$ avec des fonctions de hachage «aléatoires» h_i. En pratique, on génère des fonctions pseudoaléatoires par une règle simple comme $h_i(k_i) = (ah^{(i-1)}(k) + k_i) \bmod M$.

Définition 17.1. *Deux clés k, k' sont **en collision** si $h(k) = h(k')$.*

Pour une bonne performance, on veut éviter des collisions entre clés.

Théorème 17.1 (Birthday paradox). *Avec des clés uniformement distribués, on a au moins une collision avec probabilité $> 1/2$ quand $n > 1.18\sqrt{M}$.*

Démonstration. Probabilité d'aucune collision : $p = 1\Big(1 - \frac{1}{M}\Big)\Big(1 - \frac{2}{M}\Big) \cdots \Big(1 - \frac{n-1}{M}\Big) < \prod_{i=0}^{n-1} e^{-i/M} = \exp\Big(-\frac{(n-1)n}{2M}\Big)$. Avec $n/\sqrt{M} > \sqrt{2 \ln 2} = 1.177\cdots$, on a $p < 1/2$. ■

Théorème 17.2. *En hachage universel, la probabilité de collision entre deux clés k, k' est toujours $1/M$, indépendamment de k, k'. (Il s'agit donc de* **hachage parfait**.*)*

17.3 Adressage ouvert

En adressage ouvert, on fait la **sondage** (*probing*) d'une séquence de positions : dépend de la clé à insérer. L'adressage ouvert ne permet pas $\alpha > 1$. On examine les cases $h_0(k), h_1(k), \ldots$ avec une fonction $f : h_i(k) = h(k) + f(i, k) \bmod M$. La fonction f représente la **stratégie de résolution de collision**. Méthodes :

- ⋆ sondage linéaire $f(i, k) = i$ ou $f(i, k) = ai + b$.
- ⋆ double hachage $f(i, k) = ih'(k)$ avec fonction de hachage auxiliaire h'

Suppression. On utilise souvent une **approche paresseuse** (*lazy deletion*) : suppression = remplacement par une sentinelle. search doit passer les sentinelles, insert peut les utiliser.

Sondage linéaire. (*Linear probing*) : $h(k), h(k) + 1, h(k) + 2, \ldots$. Problème : **grappe forte** (*primary clustering*) — blocs de cases occupées.

Double hachage. Généralisation de sondage linéaire : $h(k), h(k) + c, h(k) + 2c, h(k) + 3c, \ldots$. Ici, c dépend de la clé k : $c = h'(k)$. Cette méthode est très proche d'une résolution idéale. Exemples : $h'(x) = 1 + x \bmod M'$ avec $M' < M$ ou $h'(x) = M' - (x \bmod M')$.

17.4 Performances (temps moyen)

	chaînage séparé	**sondage linéaire**	**double hachage**
	(nœuds)	(cases examinées dans la séquence de sondage)	
recherche fructueuse	$\frac{1+\alpha}{2}$	$\approx \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{1-\alpha}\big)$	$\approx \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1-i/M} \approx \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}$
recherche infructeuse	$1 + \alpha$	$\approx \frac{1}{2}\big(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\big)$	$\approx 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots \approx \frac{1}{1-\alpha}$
insertion	1	*même que recherche infructeuse*	