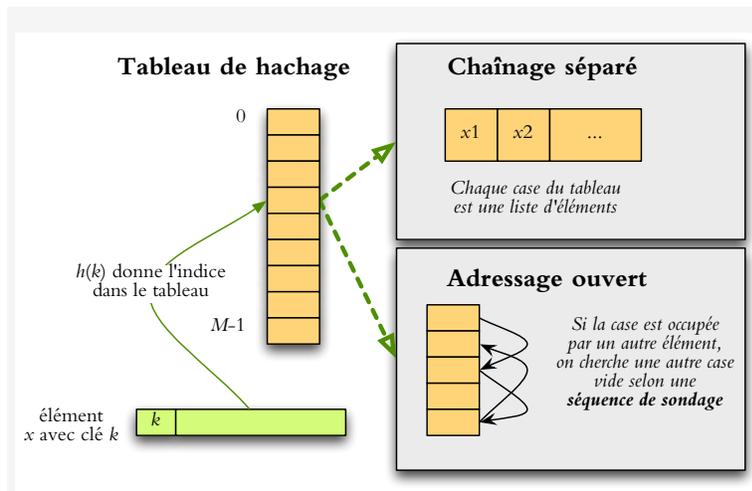


17 Hachage

Une autre structure pour implanter le TA table de symboles : **tableau de hachage**.

W^(fr)



On utilise une **fonction de hachage** $h: \mathcal{U} \mapsto \{0, 1, \dots, M - 1\}$ pour définir l'emplacement d'une clé $k \in \mathcal{U}$ dans le tableau.

En **chaînage séparé**, chaque case du tableau contient une liste d'éléments avec clés qui donnent la même valeur de hachage.

En **adressage ouvert**, tous les éléments sont placés directement dans le tableau. La suite de cases à essayer pour le placement est définie par une séquence de sondage qui commence avec l'indice $h(k)$.

Un tableau de hachage performe bien dans **le cas moyen** — dans le pire cas, la performance est comme pour une liste chaînée ($\Theta(n)$ pour insérer ou rechercher). Idéalement, on veut utiliser une fonction de hachage qui mène à une **distribution uniforme** de $h(k)$. La performance moyenne est déterminée par la **facteur de charge** $\alpha = n/M$ quand on a n éléments dans le tableau.

17.1 Chaînage séparé

On utilise une liste chaînée (chaque case donne la tête de sa liste), ou un tableau pour stocker les éléments à chaque indice. Les éléments sont non-triés en général (surtout si les clés ne sont pas comparables), parce que α (longueur moyenne d'une liste) reste assez petite dans toutes les implantations efficaces.

17.2 Fonctions de hachage

On veut assurer que $h(k)$ est assez uniforme — mais on ne connaît pas la distribution des clés en général !

Méthode de la division. On utilise $h(k) = k \bmod M$. Il faut bien choisir M pour éviter la réduction de l'espace de valeurs de hachage à cause des clés non-aléatoires :

⇒ choisir un nombre premier loin de 2^j et 10^j .

Méthode de la multiplication. On utilise $h(k) = \lfloor M\{\gamma k\} \rfloor$ avec une valeur flottante γ (partie fractionnaire : $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$). La dispersion des valeurs de hachage dépend principalement de γ . Un bon choix est $\gamma = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Ici, on choisit une taille $M = 2^p$ pour un calcul rapide avec opérations entières (multiplication, décalage de bits). Calcul rapide pour un entier k représenté sur w bits [p.e., $w = 32$ pour `int` de Java] : écrire $\gamma = A/2^w$, alors $h = (A*k) \gg \gg (w-p) \gg \gg$ (denote décalage de bits vers la droite).

Hachage universel. On a une clé de r caractères : $k = \langle k_1, k_2, \dots, k_r \rangle$ (p.e., `String`). Fonction de hachage $h^{(r)}(k) = \left(\sum_{i=1}^r h_i(k_i) \right) \bmod M$ avec des fonctions de hachage $h_i(x)$ choisies «au hasard». En pratique, on utilise une règle approximative simple comme $h_i(x) = a^{r-i} \cdot x$ (où a est un nombre premier) :

initialiser $h \leftarrow 0$; **pour** $i \leftarrow 1, 2, \dots, r$ **faire** $h \leftarrow (a \cdot h + k_i) \bmod M$

P.e., `hashCode()` de `String` (Java) utilise $a = 31$ et $M = 32$ (32-bit entiers).

Définition 17.1. Deux clés k, k' sont **en collision** si $h(k) = h(k')$.

Pour une bonne performance, on veut éviter des collisions entre clés.

Théorème 17.1. [*Birthday paradox*] Avec des clés uniformément distribués, on a au moins une collision avec probabilité $> 1/2$ quand $n > 1.18\sqrt{M}$.

Démonstration. Probabilité d'aucune collision : $p = 1 \left(1 - \frac{1}{M}\right) \left(1 - \frac{2}{M}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{M}\right) < \prod_{i=0}^{n-1} e^{-i/M} = \exp\left(-\frac{(n-1)n}{2M}\right)$. Avec $n/\sqrt{M} > \sqrt{2 \ln 2} = 1.177\dots$, on a $p < 1/2$. ■

Théorème 17.2. En hachage universel défini par les fonctions $h_i(x) = a_i x$, avec $a_i \in \{0, \dots, M-1\}$ choisis au hasard, la probabilité de collision entre deux clés est $1/M$.

Démonstration. Clés fixées $\langle x_1, \dots, x_r \rangle$ et $\langle y_1, \dots, y_r \rangle$ sont en collision si $\sum_{i=1}^r a_i(x_i - y_i) \equiv 0 \pmod{M}$. Il existe M^{r-1} choix de $\langle a_1, \dots, a_r \rangle$ avec égalité \Rightarrow collision avec probabilité $M^{r-1}/M^r = 1/M$. ■

17.3 Adressage ouvert

En adressage ouvert, on fait la **sondage** (*probing*) d'une séquence de positions : dépend de la clé à insérer. L'adressage ouvert ne permet pas $\alpha > 1$. On examine les cases $h_0(k), h_1(k), \dots$ avec une fonction $f : h_i(k) = h(k) + f(i, k) \bmod M$. La fonction f représente la **stratégie de résolution de collision**. Méthodes :

★ sondage linéaire $f(i, k) = i$ ou $f(i, k) = ai + b$.

★ double hachage $f(i, k) = ih'(k)$ avec fonction de hachage auxiliaire h'

Suppression. On utilise souvent une **approche paresseuse** (*lazy deletion*) : suppression = remplacement par une sentinelle. `search` doit passer les sentinelles, `insert` peut les recycler.

Sondage linéaire. (*Linear probing*) : $h(k), h(k)+1, h(k)+2, \dots$. Mène à la **grappe forte** (*primary clustering*) — blocs de cases occupées.

Double hachage. Généralisation de sondage linéaire : $h(k), h(k) + c, h(k) + 2c, h(k) + 3c, \dots$. Ici, c dépend de la clé $k : c = h'(k)$. Cette méthode est très proche d'une résolution idéale. Exemples : $h'(x) = 1 + x \bmod M'$ avec $M' < M$ ou $h'(x) = M' - (x \bmod M')$.

17.4 Performances (temps moyen)

	chaînage séparé (nœuds)	sondage linéaire (cases examinées dans la séquence de sondage)	double hachage (cases examinées dans la séquence de sondage)
recherche fructueuse	$\frac{1+\alpha}{2}$	$\approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{1-\alpha}\right)$	$\approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{1-i/M} \approx \frac{1}{\alpha} \ln \frac{1}{1-\alpha}$
recherche infructueuse	$1 + \alpha$	$\approx \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right)$	$\approx 1 + \alpha + \alpha^2 + \dots \approx \frac{1}{1-\alpha}$
insertion	1	même que recherche infructueuse	