

# IFT2015 hiver 2012 — Devoir 3

Miklós Csűrös

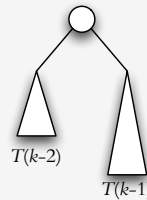
29 février 2012

À remettre avant 20 :15 le 13 mars. Remettez un rapport écrit par courriel (à csuros@iro. . . ) en format PDF. Travaillez seul.

## 3.1 Arbre Fibonacci (5 points)



On définit les arbres binaires Fibonacci  $T(k)$  :  $k = 1, 2, \dots$  par récursion. Les arbres  $T(1)$  et  $T(2)$  ont un seul nœud externe. Pour  $k > 2$ , les deux enfants de la racine de  $T(k)$  sont  $T(k - 1)$  et  $T(k - 2)$ .



Pour chaque arbre  $T(k)$ , soit  $h(k)$  sa hauteur et  $n(k)$  le nombre de ses nœuds internes. ► Démontrez que  $h(k) = \Theta(\log n(k))$ . **Indice.** Vous pouvez se servir du fait que  $f = \Theta(g)$  si  $0 < \lim_{i \rightarrow \infty} f(i)/g(i) < \infty$  (quand cette limite existe).

## 3.2 Minimax (15 points)

On a un tableau  $A[0..n - 1]$  et un paramètre  $0 < \ell \leq n$ . On veut calculer

$$Q(A, \ell) = \max_{i=0,1,\dots,n-\ell} \left\{ \min \{ A[i], A[i + 1], A[i + 2], \dots, A[i + \ell - 1] \} \right\}.$$

► Donnez un algorithme qui calcule  $Q(A, \ell)$  en temps  $O(n \log \ell)$ , avec  $O(\ell)$  espace de travail au plus.

**Indice.** L'algorithme parcourt  $A$  en «glissant» un fenêtre de taille  $\ell$  au long du tableau :  $m \leftarrow -\infty$ ; **for**  $i \leftarrow 0, \dots, n - \ell$ :  $m \leftarrow \max \{ m, M(i, \ell) \}$  où  $M(i, \ell) =$

$\min\{A[i], A[i+1], A[i+2], \dots, A[i+\ell-1]\}$ . Une solution naïve calcule  $M(i, \ell)$  dans une boucle interne qui prend  $\Theta(\ell)$  temps. Une meilleure solution utilise une structure de données qui permet de calculer  $M(i, \ell)$  rapidement. En particulier, la structure devrait permettre la mise à jour efficace  $M(i, \ell) \rightarrow M(i+1, \ell)$ , en temps  $O(\log \ell)$ .

### 3.3 Tri d'un tableau modifié (10 points)

Supposons qu'on a un tableau  $A[0..n-1]$ , trié en ordre croissant le matin. On sait que  $k > 0$  éléments ont changé de valeur pendant la journée, mais on ne sait pas lesquels. Donnez un algorithm pour trier  $A[0..n-1]$  le soir, en  $\Theta(n + k \log k)$  temps.

