

IFT2015 hiver 2012 — Devoir 3

Miklós Csűrös

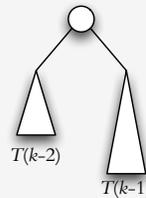
29 février 2012

À remettre avant 20 :15 le 13 mars. Remettez un rapport écrit par courriel (à csuros@iro. . .) en format PDF. Travaillez seul.

3.1 Arbre Fibonacci (5 points)



On définit les arbres binaires Fibonacci $T(k)$: $k = 1, 2, \dots$ par récursion. Les arbres $T(1)$ et $T(2)$ ont un seul nœud externe. Pour $k > 2$, les deux enfants de la racine de $T(k)$ sont $T(k - 1)$ et $T(k - 2)$.



Pour chaque arbre $T(k)$, soit $h(k)$ sa hauteur et $n(k)$ le nombre de ses nœuds internes. ► Démontrez que $h(k) = \Theta(\log n(k))$. **Indice.** Vous pouvez se servir du fait que $f = \Theta(g)$ si $0 < \lim_{i \rightarrow \infty} f(i)/g(i) < \infty$ (quand cette limite existe).

3.2 Minimax (15 points)

On a un tableau $A[0..n - 1]$ et un paramètre $0 < \ell \leq n$. On veut calculer

$$Q(A, \ell) = \max_{i=0,1,\dots,n-\ell} \left\{ \min \{ A[i], A[i + 1], A[i + 2], \dots, A[i + \ell - 1] \} \right\}.$$

► Donnez un algorithme qui calcule $Q(A, \ell)$ en temps $O(n \log \ell)$, avec $O(\ell)$ espace de travail au plus.

Indice. L'algorithme parcourt A en «glissant» un fenêtre de taille ℓ au long du tableau : $m \leftarrow -\infty$; **for** $i \leftarrow 0, \dots, n - \ell$: $m \leftarrow \max \{ m, M(i, \ell) \}$ où $M(i, \ell) =$

$\min\{A[i], A[i+1], A[i+2], \dots, A[i+\ell-1]\}$. Une solution naïve calcule $M(i, \ell)$ dans une boucle interne qui prend $\Theta(\ell)$ temps. Une meilleure solution utilise une structure de données qui permet de calculer $M(i, \ell)$ rapidement. En particulier, la structure devrait permettre la mise à jour efficace $M(i, \ell) \rightarrow M(i+1, \ell)$, en temps $O(\log \ell)$.

3.3 Tri d'un tableau modifié (10 points)

Supposons qu'on a un tableau $A[0..n-1]$, trié en ordre croissant le matin. On sait que $k > 0$ éléments ont changé de valeur pendant la journée, mais on ne sait pas lesquels. Donnez un algorithme pour trier $A[0..n-1]$ le soir, en $\Theta(n + k \log k)$ temps.

