11 Tris élémentaires et tri par fusion

11.1 Tri

On a un fichier d'éléments avec **clés comparables** — on veut les ranger selon l'ordre les clés. Clés comparables en Java :

```
public interface Comparable<T>
{
      int compareTo(T autre_objet);
}
```

`x.compareTo(y)` retourne une valeur négative si `x` précède `y`, ou positive si `x` suit `y`, selon l'ordre «naturel» des éléments.

Tri **externe** : fichier stocké partiellement ou entièrement en mémoire externe (disque) — accès à mémoire externe est coûteux...

Tri **interne** : tout le fichier est en mémoire (représenté par un tableau ou une liste chaînée) :

Méthode de tri interne	**tableau**	**liste chaînée**
tri par sélection (*selection sort*)	oui	oui
tri par insertion (*insertion sort*)	oui	oui
tri par fusion (*Mergesort*)	oui	oui
tri par tas (*Heapsort*)	oui	non
tri rapide (*Quicksort*)	oui	non

11.2 Tris élémentaires

Tri par sélection

W(fr)

Boucler $i \leftarrow 0, \ldots, n-2$; propriété invariante à la fin d'itération i :

$$\mathcal{P}(i) = \text{«}A[0..i] \text{ contient les } i \text{ éléments les plus petits, dans l'ordre correct»}$$

Algo TRI-SELECTION($A[0 \ldots n-1]$)
S1 **for** $i \leftarrow 0, 1, \ldots, n-2$ **do**
S2 minidx $\leftarrow i$ *// (on cherche l'élément minimal en* $A[i+1..n-1]$*)*
S3 **for** $j \leftarrow i+1, \ldots, n-1$ **do if** $A[j] < A$[minidx] **then** minidx $\leftarrow j$
// maintenant A[minidx] $= \min\{A[i], A[i+1], \ldots, A[n-1]\}$
S4 **if** $i \neq$ minidx **then** échanger $A[i] \leftrightarrow A$[minidx] *// maintenant* $\mathcal{P}(i)$ *est vraie*

Complexité de calcul : $\Theta(n^2)$ pour tout A.

⋆ comparaison d'éléments [ligne S3] : $(n-1) + (n-2) + \cdots + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ fois ;

⋆ échange d'éléments [ligne S4] : $\leq (n-1)$ fois ⇒ très efficace si l'échange est beaucoup plus coûteux que la comparaison !

Tri par insertion

W(fr)

Boucler $i \leftarrow 1, \ldots, n-1$; propriété invariante à la fin d'itération i :

$\mathcal{Q}(i) =$ «le sous-tableau $A[0..i]$ contient les éléments originaux du même préfixe, dans l'ordre trié.»

Algo TRI-INSERTION($A[0 \ldots n-1]$) *// première solution*
I1 **for** $i \leftarrow 1, \ldots, n-1$ **do**
I2 $\quad j \leftarrow i-1$; **while** $j \geq 0$ et $A[j] > A[j+1]$ **do** échanger $A[j+1] \leftrightarrow A[j]$; $j \leftarrow j-1$

Complexité — dépend de l'ordre des éléments au début :

meilleur cas (déjà trié) : $n-1$ comparaisons et aucun échange $\Rightarrow$ très utile si A est «presque trié» au début

pire cas (trié en ordre décroissant) : $\frac{n(n-1)}{2}$ comparaisons et échanges

moyen cas (permutation aléatoire) : $\Theta(n^2)$

Génie algorithmique :

- ⋆ placer le minimum en $A[0]$: il servira comme sentinelle pour simplifier la condition d'arrêt dans la boucle interne.
- ⋆ remplacer échange par décalage.

Algo TRI-INSERTION($A[0 \ldots n-1]$) *// plus efficace*
IM1 minidx $\leftarrow 0$; **for** $i \leftarrow 1, \ldots, n-1$ **if** $A[i] < A[$minidx$]$ **alors** minidx $\leftarrow i$
IM2 échanger $A[0] \leftrightarrow A[$minidx$]$ *// sentinelle : on ne devra pas vérifier $j \geq 0$ en IM4*
IM3 **for** $i \leftarrow 1, \ldots, n-1$ **do**
IM4 $\quad j \leftarrow i-1$; $a \leftarrow A[i]$; **while** $A[j] > a$ **do** $A[j+1] \leftarrow A[j]$; $j \leftarrow j-1$
IM5 $\quad A[j+1] \leftarrow a$

11.3 Fusion de deux tableaux triés.

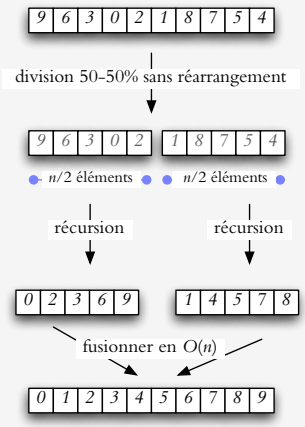
Algo FUSION($A[0..n-1], B[0..m-1]$) (de type `Comparable[]`, triés)
F1 initialiser $C[0..n+m-1]$ *// on place le résultat dans C*
F2 $i \leftarrow 0; j \leftarrow 0; k \leftarrow 0$ *// i est l'indice dans A ; j est l'indice dans B*
F3 **while** $i < n$ et $j < m$ **do**
F4 $\quad$ **if** $A[i] \leq B[j]$ **then** $C[k] \leftarrow A[i]; i \leftarrow i+1$ **else** $C[k] \leftarrow B[j]; j \leftarrow j+1$
F5 $\quad k \leftarrow k+1$
F6 **while** $i < n$ **do** $C[k] \leftarrow A[i]; i \leftarrow i+1; k \leftarrow k+1$
F7 **while** $j < m$ **do** $C[k] \leftarrow B[j]; j \leftarrow j+1; k \leftarrow k+1$

Théorème 11.1. *L'algorithme* FUSION *calcule la fusion de deux tableaux triés en un temps $\Theta(n+m)$, avec $n+m$ comparaisons [d'éléments entre les listes] au pire.*

11.4 Tri par fusion

Tri par fusion (*mergesort*) utilise le principe de **diviser pour régner** dans une procédure récursive. W(fr)

$$\mathsf{tri}\big(A[0..n-1]\big) = \begin{cases} A & \{n < 2\} \\ \mathsf{fusion}\Big(\mathsf{tri}\big(A[0..\lfloor n/2 \rfloor]\big), \mathsf{tri}\big(A[\lfloor n/2 \rfloor + 1..n-1]\big)\Big) & \{n \geq 2\} \end{cases}$$



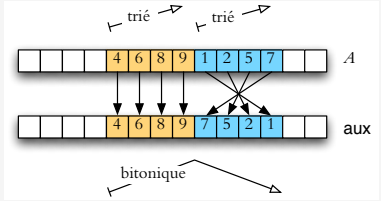
Algo MERGESORT$(A[0..n-1], g, d)$ *// appel initial avec $g = 0, d = n$*
// récursion pour trier le sous-tableau $A[g..d-1]$
M1 **if** $d - g < 2$ **then return** *// cas de base : tableau vide ou un seul élément*
M2 $m \leftarrow \lfloor (d+g)/2 \rfloor$ *// m est au milieu*
M3 MERGESORT(A, g, m) *// trier partie gauche*
M4 MERGESORT(A, m, d) *// trier partie droite*
M5 FUSION(A, g, m, d) *// fusion des résultats*

Tri hybride

En pratique, le tri par fusion performe le mieux dans une **approche hybride** : la récursion est trop couteuse pour les petits sous-tableaux, et le tri par insertion est plus rapide. Pour cette raison, il vaut implanter le tri par fusion avec un seuil $\ell > 1$ sur les petits sous-tableaux. On passe les sous-tableaux de taille $d - g < \ell$ en Ligne M1 directement à un tri par insertion.

Gestion d'espace auxiliaire

Typiquement, on utilise un seul tableau auxiliaire pour faire la fusion. Avec un arrangement **bitonique**, on peut simplifier les conditions dans la boucle de la fusion.



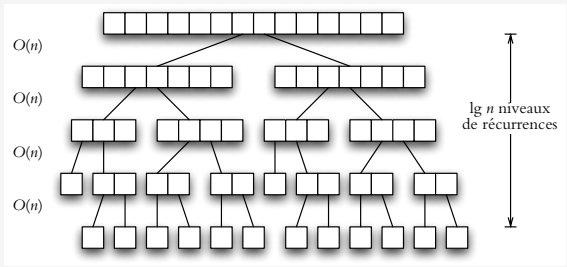
Algo FUSION$(A[\,], g, m, d)$ *// fusion «en place» pour $A[g..m-1]$ et $A[m..d-1]$*
F1 **for** $i \leftarrow g, g+1, \ldots, m-1$ **do** aux$[i] \leftarrow A[i]$
F2 **for** $j \leftarrow m, m+1, \ldots, d-1$ **do** aux$[m+d-1-j] \leftarrow A[j]$
F3 $i \leftarrow g\,;\, j \leftarrow d-1\,;\, k \leftarrow g$
F4 **while** $k < d$ **do** *// meilleure condition : $i < m$*
F5 **if** aux$[i] \le$ aux$[j]$ **then** $A[k] \leftarrow$ aux$[i]\,;\, i \leftarrow i+1; k \leftarrow k+1$
F6 **else** $A[k] \leftarrow$ aux$[j]\,;\, j \leftarrow j-1; k \leftarrow k+1$

11.5 Temps de calcul du tri par fusion

Dans la fusion, on combine les deux tableaux triés en un troisième en un temps linéaire (Théorème 11.1). Le temps de calcul s'écrit donc comme

$$T(n) = T\big(\lfloor n/2 \rfloor\big) + T\big(\lceil n/2 \rceil\big) + T_{\text{fusion}}\big(\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil\big) + O(1) \tag{11.1}$$

où $T_{\text{fusion}}(k, m) = \Theta(k+m)$ est le temps pour fusionner deux tableaux de tailles k et m.



On a donc $T_{\text{fusion}}(k, m) = \Theta(k+m)$ en (11.1), qui mène à la récurrence classique

$$T(n) = T\big(\lfloor n/2 \rfloor\big) + T\big(\lceil n/2 \rceil\big) + \Theta(n).$$

La solution de la récurrence est $T(n) = \Theta(n \log n)$. On peut voir cette solution directement en dessinant l'**arbre de récursions** : on a $\lceil \lg n \rceil$ niveaux et $O(n)$ travail (fusions) à chaque niveau.

11.6 Tri de liste chaînée

Tris élémentaires

On peut implanter la logique des tris élémentaires avec des listes chaînées aussi. Soit L une liste chaînée, avec une sentinelle (nœud factice) head à la tête, et null à la fin. Chaque nœud N possède la valeur N.val et une référence à son successeur N.next. L'algorithme ci-dessous performe un tri par sélection.

```
    Algo TRI-SELECTION-LISTE(head)          // tri par sélection sur la liste qui commence avec head
SL1 I ← head
SL2 while I.next ≠ null do
SL3     min ← I ; J ← I.next
SL4     while J.next ≠ null do
SL5         if J.next.val < min.next.val then min ← J
SL6         J ← J.next
SL7     // maintenant min.next est le nœud avec val minimale dans la sous-liste après I
SL8     if min ≠ I then
SL9         M ← min.next ; min.next ← M.next                    // suppression après min
SL10        M.next ← I.next ; I.next ← M                        // insertion après I
SL11    I ← I.next
```

Tri par fusion

Pour adapter les récurrences à des listes chaînées, il faut séparer une liste en deux moitiés — une implantation simple ajoute des éléments en altérnant entre les deux «demi-listes».

```
    MERGESORT-LIST(A)          // tri d'une liste chaînée qui commence avec nœud A
ML1 if A = null then return                    // une liste vide est triée par défaut
ML2 initialiser sous-listes vides B1 ← null et B2 ← null
ML3 N1 ← B1 ; N2 ← B2                          // Ni est le dernier nœud en Bi
ML4 while A ≠ null do
ML5     N ← A; A ← A.next; N.next ← null
ML6     if Ni = null then Bi ← N               // premier nœud sur liste i
ML7     else Ni.next ← N                       // insertion après Ni
ML8     Ni ← N ; i ← 3 − i                     // i = 1, 2, 1, 2, ...
ML9 return FUSION(MERGESORT-LIST(B1), MERGESORT-LIST(B2))
```

Exercice 11.1. ► Adapter l'algorithme de FUSION de §11.3 à des listes chaînées pour la ligne ML9. L'algorithme prend deux listes comme arguments, dans lesquelles les éléments sont dans l'ordre croissant, et retourne une troisième liste qui comprend tous les nœuds des listes d'entrée, dans l'ordre croissant. Faites attention au cas de listes vides à l'entrée.

Exercice 11.2. ► Montrer comment implanter tri par insertion sur une liste chaînée.