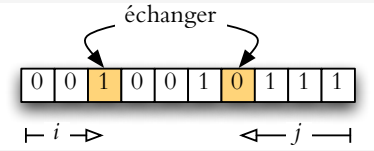
12 Tri rapide

12.1 Tri binaire

Supposons qu'il y a juste deux clés possibles (0 et 1) dans un tableau à trier. Alors on peut performer le tri en un temps linéaire à l'aide de deux indices qui balayent à partir des extremités vers le milieu.

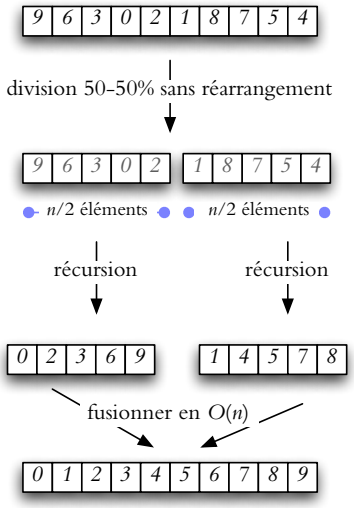



```
    TRI01(A[0..n − 1])                                   // tri binaire
B1  i ← 0 ; j ← n − 1
B2  loop
B3      while A[i] = 0 et i < j do i ← i + 1
B4      while A[j] = 1 et i < j do j ← j − 1
B5      if i < j then échanger A[i] ↔ A[j]
B6      else return
```

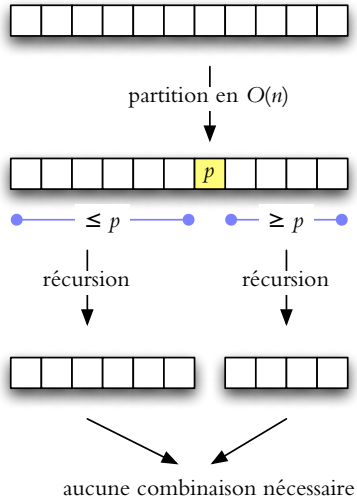
Exercice 12.1. *On peut rendre l'exécution plus efficace si on a des sentinelles aux deux extrémités :* $A[0] = 0$ *et/ou* $A[n-1] = 1$. *Montrez une version améliorée de* TRI01 *qui place des sentinelles dans un premier parcours, et utilise des conditions plus simples dans les boucles intérieures.*

12.2 Tri rapide

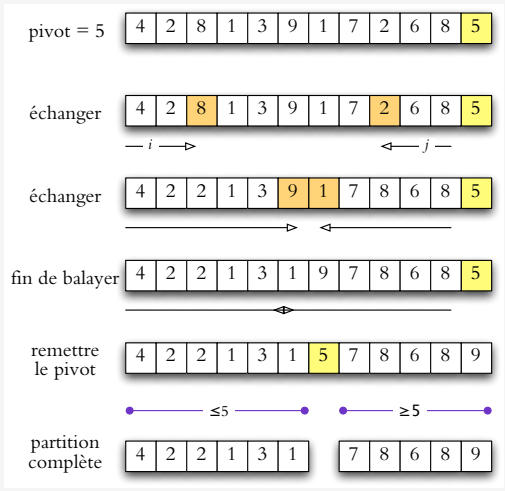
W(fr)



Le **tri par fusion** utilise la logique de «diviser pour régner» : le tableau est divisé en deux sous-tableaux (en temps $O(1)$) qui sont triés ensuite dans des appels récursifs, et on combine les résultats (fusion) en un temps linéaire.



En **tri rapide**, on choisit un **pivot** p, et à l'aide des échanges d'éléments, on place les éléments inférieurs à p à la gauche, et ceux supérieurs à p à la droite du tableau. Après une telle partition, on peut procéder avec des appels récursifs aux deux sous-tableaux gauche et droit. Notez que le pivot n'est pas nécessairement la médiane : les sous-tableaux gaches et droits résultants peuvent avoir des tailles très différentes. La partition même suit la logique du tri binaire.



L'idée principale est la **partition** autour d'un pivot.

Algo QUICKSORT$(A[0..n-1], g, d)$ *// tri de $A[g..d]$*
Q1 **if** $g \geq d$ **then return** *// cas de base*
Q2 $i \leftarrow$ PARTITION(A, g, d)
Q3 QUICKSORT$(A, g, i-1)$
Q4 QUICKSORT$(A, i+1, d)$

Algo PARTITION(A, g, d) *// partition de $A[g..d]$*
P1 chosir le pivot $p \leftarrow A[d]$
P2 $i \leftarrow g-1$; $j \leftarrow d$
P3 **loop**
P4 **do** $i \leftarrow i+1$ **while** $A[i] < p$
P5 **do** $j \leftarrow j-1$ **while** $j \geq i$ et $A[j] > p$
P6 **if** $i \geq j$ **then** sortir de la boucle
P7 échanger $A[i] \leftrightarrow A[j]$
P8 échanger $A[i] \leftrightarrow A[d]$
P9 **return** i

Pour trier un tableau $A[0..n-1]$ en ordre croissant, on exécute QUICKSORT$(A, 0, n-1)$. C'est un tri en place.

12.3 Performances

Soit $m = d - g + 1$, le nombre des éléments dans le sous-tableau à trier, avec $m > 1$. La partition (Lignes P3–P7) se fait en un temps $\Theta(m)$. Le temps de calcul est donc

$$T(m) = \Theta(m) + T(i) + T(m-1-i).$$

La récurrence dépend de l'indice i du pivot.

	pivot i	**récurrence** $T(n)$	**solution** $T(n)$
Meilleur cas	$(n-1)/2$	$2 \cdot T\big((n-1)/2\big) + \Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$
Pire cas	$0, n-1$	$T(n-1) + \Theta(n)$	$\Theta(n^2)$
Moyen cas	aléatoire	$\mathbb{E}T(n) = 2\mathbb{E}T(i) + \Theta(n)$	$\Theta(n \log n)$

Le pire cas arrive (entre autres) quand on a un tableau trié au début !

Exercice 12.2. *On a aussi $O(n \log n)$ quand la partition regroupe au moins une fraction fixé (p.e., $\alpha = 10\%$) des éléments à la fois. Démontrez que le tri rapide prend $O(n \log n)$ si la position i du pivot satisfait $\min\{i, m-1-i\} \geq m/3$ lors de la partition de sous-tableaux de taille m.*

12.4 Améliorations

Petits sous-tableaux. Le **tri par insertion** est plus rapide que quicksort quand $d - g$ est petit ($g \geq d - \ell^*$ avec $\ell^* = 5..20$). En Ligne Q1, c'est mieux donc de faire le tri par insertion pour tels petits tableaux. En fait, on peut juste **ignorer** les petits sous-tableaux entièrement (retourner si $g \geq d - \ell^*$ en Ligne Q1). À la fin, il faut parcourir le tableau entier selon tri par insertion en $\Theta(n\ell^*) = \Theta(n)$.

Choix du pivot. Deux choix performent très bien en pratique : médiane ou aléatoire.

Médiane de trois

```
P1.1  si d ≥ g + 2 alors
P1.2      if A[g] > A[d − 1] then échanger A[g] ↔ A[d − 1]
P1.3      if A[d] > A[d − 1] then échanger A[d] ↔ A[d − 1]
P1.4      if A[g] > A[d] then échanger A[g] ↔ A[d]
P1.5  p ← A[d]                          // A[g] ≤ A[d] ≤ A[d − 1]
```

et on se sert des **sentinelles** qui sont maintenant en place $A[g]$, $A[d-1]$:

```
P2'  i ← g; j ← d − 1
P5'      do j ← j − 1 while A[j] > p
```

Aléatoire

```
P1.1  k ← RANDOM(g, d)
P1.2  p ← A[k]
P1.3  if k ≠ d then
P1.4      A[k] ← A[d]
P1.5      A[d] ← p
```

Profondeur de la pile d'exécution. En une implantation efficace, on se sert de la position terminale du deuxième appel récursif (Ligne Q4).

```
     Algo QUICKSORT_ITER(A[0..n − 1], g, d)          // tri de A[g..d]
QI1  while g < d do
QI2      i ← PARTITION(A, g, d)
QI3      QUICKSORT_ITER(A, g, i − 1)
QI4      g ← i + 1                  // boucler au lieu de l'appel récursif
```

La profondeur de la pile d'exécution dépend donc du nombre d'appels récursifs en Ligne QI3 ce qui est $\Theta(n)$ au pire (p.e., on a $i = d$ toujours). On peut facilement modifier le code pour toujours faire l'appel récursif avec le plus court entre $A[g..i-1]$ et $A[i+1..d]$ qui assure que la profondeur maximale est $\Theta(\log n)$.

12.5 Moyen cas

Théorème 12.1. *Soit $D(n)$ le nombre moyen de comparaisons avec un pivot aléatoire, où n est le nombre d'éléments dans un tableau $A[0..n-1]$. Alors,*

$$\frac{D(n)}{n} = O(\log n).$$

Lemme 12.2. *On a $D(0) = D(1) = 0$, et*

$$D(n) = n - 1 + \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}\Big(D(i) + D(n-1-i)\Big) = n - 1 + \frac{2}{n}\sum_{i=0}^{n-1} D(i).$$

Démonstration. Supposons que le pivot est le i-ème plus grand élément de A. Le pivot est comparé à $(n-1)$ autre éléments pour la partition. Les deux partitions sont de tailles i et $(n-1-i)$. Or, i prend les valeurs $0, 1, \ldots, n-1$ avec la même probabilité. ■

Preuve de Théorème 12.1. Par Lemme 12.2,

$$\begin{aligned} nD(n) - (n-1)D(n-1) &= \Big(n(n-1) + 2\sum_{i=0}^{n-1} D(i)\Big) - \Big((n-1)(n-2) + 2\sum_{i=0}^{n-2} D(i)\Big) \\ &= 2(n-1) + 2D(n-1). \end{aligned}$$

D'où on a

$$\frac{D(n)}{n+1} = \frac{D(n-1)}{n} + \frac{2n-2}{n(n+1)} = \frac{D(n-1)}{n} + \frac{4}{n+1} - \frac{2}{n}.$$

Avec $E(n) = \frac{D(n)-2}{n+1}$, on peut écrire

$$E(n) = E(n-1) + \frac{2}{n+1}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} E(n) &= E(0) + \frac{2}{2} + \frac{2}{3} + \cdots + \frac{2}{n+1} \\ &= \frac{D(0)-2}{1} + 2(H_{n+1} - 1) = 2H_{n+1} - 4 \end{aligned}$$

où $H_n = \sum_{i=1}^{n} 1/i = \ln n + \gamma + o(1)$ est le n-ème nombre harmonique ($\gamma = 0.5772\cdots$ est la constante d'Euler-Mascheroni).

En retournant à $D(n) = 2 + (n+1)E(n)$, on a alors

$$D(n) = 2(n+1)H_{n+1} - 4n - 2 < 2nH_{n+1}$$

Donc le nombre de comparaisons en moyenne est tel que $\frac{D(n)}{n} < 2H_{n+1} = O(\log n)$. ■

En fait la preuve montre que $D(n)/n = \big(2 + o(1)\big)H_n \sim 2\ln n \approx 1.39 \lg n$. C'est seulement 39% pire que le meilleur cas !

12.6 Sélection

Supposons qu'on veut trouver le k-ème plus petit élément dans un tableau $A[0..n-1]$. Il existe des algorithmes qui le font en temps $\Theta(n)$ au pire cas. Ici, on se sert plutôt de la partition autour d'un pivot pour achever un temps de calcul linéaire *en moyen cas* (voir Théorème 12.3 ci-bas), mais $\Theta(n^2)$ au pire. En pratique, l'algorithme par partition est souvent plus performant que l'algorithme avec un temps linéaire théoriquement guaranti.

Idée de clé : après avoir appellé $i \leftarrow$ PARTITION$(A, 0, n-1)$, on trouve le k-ème élément en $A[0..i-1]$ si $k < i$ ou en $A[i+1..n-1]$ si $k > i$. En même temps, on réorganise le tableau pour que $A[k]$ soit le k-ème plus petit élément.

```
   Algo SELECTION(A[0..n-1], g, d, k)
S1 if d ≤ g + 1 then                                   // cas de base : 1 ou 2 éléments
S2     if d = g + 1 et A[d] < A[g] then échanger A[g] ↔ A[d]   // 2 éléments
S3     return A[k]
S4 i ← PARTITION(A, g, d)
S5 if k = i then return A[k]                           // on l'a trouvé
S6 if k < i then return SELECTION(A, g, i − 1, k)      // continuer à la gauche
S7 if k > i then return SELECTION(A, i + 1, d, k)      // continuer à la droite
```

Comme c'est une **récursion terminale**, on peut transformer le code en forme itérative très facilement.

Théorème 12.3. *Avec un pivot aléatoire, algorithme* SELECTION *fait* $\big(2 + o(1)\big)n$ *comparaisons en moyenne.*

Exercice 12.3. *Démontrer Théorème 12.3.*