

Complexité

La classe P

Définition 7.7

$TIME(t(n)) = \{ L \mid L \text{ est décidé par une machine de Turing déterministe en temps } O(t(n)) \}$.

Définition 7.11. La **classe de complexité P** est définie comme suit :

$$P = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} TIME(n^k).$$

Note : Si $p(n)$ et $q(n)$ sont des polynômes alors $p(n) + q(n)$, $p(n)q(n)$ et $p(q(n))$ sont aussi des polynômes.

Qu'ont de spécial les polynômes ?

- **P** est robuste : une bande, k bandes, k têtes, et plusieurs autres modèles engendrent la même classe **P**.
- **P** correspond aux langages décidables en pratique en un temps réaliste.

Le temps (déterministe)

Soit M une machine de Turing déterministe qui s'arrête sur toutes ses entrées.

Quel est le **temps de calcul** de M sur w ?

Facile et naturel : c'est le **nombre de transitions** avant l'arrêt de M sur entrée w .

Quel est le **temps de calcul** de M ?

Définition 7.1. Le **temps de calcul** de M est une fonction

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \\ n \mapsto \max_{|w|=n} [\text{temps de calcul de } M \text{ sur } w].$$

On dira que M fonctionne en temps $f(n)$, ou que sa complexité de temps est $f(n)$.

Définition 7.2

Soit $f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$. On dira que f est dans l'**ordre de** g , noté $f \in O(g)$, s'il existe $c, n_0 \in \mathbb{N}$ tels que $\forall n \geq n_0, f(n) \leq cg(n)$.

On dira aussi que g est une borne supérieure asymptotique pour f .

Lemme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} < \infty \Rightarrow f \in O(g), \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = \infty \Rightarrow f \notin O(g).$$

Ex : 7.3, 7.4.

Ex : $\{ w \# w \mid w \in \{a, b\}^* \}$ est décidé

- par une machine de Turing à une bande en un temps dans l'**ordre de** n^2 , et
- par une machine de Turing à deux bandes en un temps dans l'**ordre de** n .