

à remettre le jeudi 23 octobre 2003

1 _____ (10 points)

Soit R une relation dans un ensemble A . Pour tout entier positif n , on définit la relation R^n de la façon suivante: $R^1 = R$ et $R^{n+1} = R^n \circ R$. Montrez que si R est symétrique, alors R^n est symétrique pour tout entier positif n .

2 _____ (10 points)

Soit $P(A)$ l'ensemble puissance d'un ensemble A . Soit R la relation dans $P(A)$ définie par $(X, Y) \in R$ si et seulement si $X \subseteq Y$. R est-elle un ordre partiel? un ordre total? Justifiez votre réponse.

3 _____ (10 points)

Soit une fonction $f : A \rightarrow B$, où A et B sont des ensembles finis tels que $|A| = |B|$. Montrez que f est injective si et seulement si f est surjective.

4 _____ (10 points)

On doit choisir 6 personnes parmi 10 personnes pour une photo de mariage. Sur cette photo, les personnes sont alignées en rangée et occupent les positions 1, 2, 3, 4, 5 et 6. Les deux mariés font évidemment partie des 10 personnes présentes. En supposant que deux photos sont identiques si et seulement si les mêmes personnes occupent les mêmes positions, déterminer le nombre de photos possibles dans les cas suivants:

- (a) (3 points) la mariée doit être dans la photo;
- (b) (3 points) les deux mariés doivent être dans la photo;
- (c) (4 points) *exactement* un des deux mariés doit être dans la photo.

5 _____ (10 points)

Une équipe de balle molle, composée de 10 joueurs, doit être formée en sélectionnant dans un groupe de 10 hommes et 3 femmes.

- (a) (3 points) De combien de façons peut-on sélectionner les 10 joueurs qui formeront l'équipe?
- (b) (3 points) De combien de façons peut-on sélectionner les 10 joueurs, si au moins un de ces joueurs doit être une femme?
- (c) (4 points) Supposons que lors de la sélection, on affecte également à chaque joueur une position sur le terrain (c.f., lanceur, receveur,...). Combien d'équipes différentes peut-on envoyer sur le terrain, si on suppose que deux équipes identiques sont formées des mêmes joueurs aux mêmes positions?

6 _____ (10 points)

Combien de personnes doit-il y avoir dans une salle pour être sûr qu'au moins trois d'entre elles sont nées le même mois?

7 _____ (10 points)

Combien de mots distincts commençant ou se terminant par la lettre R peut-on former en permutant les lettres du mot ERREUR?

8 _____ (10 points)

Montrez que le nombre de chaînes de bits de longueur $n \geq 4$ qui contiennent exactement deux occurrences de la sous-chaîne "10" est $C(n + 1, 5)$.

9 _____ (10 points)

Un domino est un rectangle divisé en deux carrés où chaque carré peut être numéroté avec 0, 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 points. Combien existe-t-il de dominos différents?

10 _____ (10 points)

Développer l'expression $(2c - 3d)^5$ à l'aide du théorème du binôme.