

à remettre au plus tard le 20 novembre 2003

1 \_\_\_\_\_ (10 points)

Soit  $p \in \{1, 2, \dots\}$ . Montrez que: si  $2^p - 1$  est un nombre premier, le nombre  $2^{p-1}(2^p - 1)$  est parfait, c'est-à-dire qu'il est égal à la somme de ses diviseurs autres que lui-même.

2 \_\_\_\_\_ (10 points)

Calculez PGCD(144,233) par l'algorithme d'Euclide. Combien de divisions sont-elles effectuées?

3 \_\_\_\_\_ (10 points)

Spécifiez par un pseudocode un algorithme non récursif pour calculer  $x^n$ , où  $x$  est un nombre réel et  $n$  est un entier.

4 \_\_\_\_\_ (10 points)

Spécifiez par un pseudocode un algorithme récursif pour calculer  $x^{2^n}$ , où  $x$  est un nombre réel et  $n$  est un entier positif.

5 \_\_\_\_\_ (10 points)

Spécifiez par un pseudocode un algorithme non récursif qui détermine si une fonction  $f : A \rightarrow B$  est injective, où  $A$  et  $B$  sont des ensembles finis.

6 \_\_\_\_\_ (10 points)

Spécifiez par un pseudocode un algorithme non récursif qui identifie tous les termes d'une suite finie d'entiers qui sont plus grands que la somme de tous les termes précédents de la suite. Analysez la complexité en temps en pire cas de cet algorithme.

7 \_\_\_\_\_ (10 points)

Spécifiez par un pseudocode un algorithme non récursif pour trouver les plus grand et plus petit entiers dans une suite finie d'entiers. Analysez la complexité en temps en pire cas de cet algorithme.

8 \_\_\_\_\_ (10 points)

Si  $f(n) \in \Theta(g(n))$ , a-t-on  $2^{f(n)} \in \Theta(2^{g(n)})$ ?

9 \_\_\_\_\_ (10 points)

Soit  $f : \{1, 2, \dots\} \rightarrow \{1, 2, \dots\}$  définie par  $f(n) = \sum_{j=1}^{n^2} j$ . Trouvez un entier  $k$  tel que  $f(n) \in \Theta(n^k)$ .

10 \_\_\_\_\_ (10 points)

Soit  $f : \{1, 2, \dots\} \rightarrow \mathbf{R}^+$  définie par  $f(n) = (\log(n^n + n^{n^2}))(\log n!)$ , où  $\mathbf{R}^+$  est l'ensemble des réels positifs. Existe-t-il des entiers  $k$  et  $l$  tels que  $f(n) \in \Theta(n^k(\log n)^l)$ ? Si oui, déterminez ces entiers; sinon, justifiez.