

à remettre au plus tard le 4 décembre 2003

**1** \_\_\_\_\_ (10 points)

Trouvez, par la technique de l'équation caractéristique, la solution de la relation de récurrence  $a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2}$ ,  $n \geq 2$ , avec conditions initiales  $a_0 = 4$  et  $a_1 = 1$ .

**2** \_\_\_\_\_ (10 points)

Trouvez une relation de récurrence, incluant les conditions initiales, pour caractériser le nombre de chaînes de bits de longueur  $n$  contenant trois 0 consécutifs.

**3** \_\_\_\_\_ (10 points)

Trouvez une relation de récurrence, incluant les conditions initiales, pour caractériser le nombre de façons de monter  $n$  marches d'un escalier, étant donné qu'on peut monter une ou deux marches à la fois. Trouvez la solution de cette relation de récurrence.

**4** \_\_\_\_\_ (10 points)

Trouvez des relations de récurrence, incluant les conditions initiales, pour caractériser le nombre de sommets et le nombre d'arêtes du graphe  $Q_n$ . Trouvez les solutions de ces relations de récurrence par la méthode itérative.

**5** \_\_\_\_\_ (10 points)

Pour quelles valeurs de  $n$  les graphes  $K_n$  et  $Q_n$  sont-ils bipartites?

**6** \_\_\_\_\_ (10 points)

Pour quelles valeurs de  $n$  les graphes  $K_n$  et  $Q_n$  contiennent-ils un cycle d'Euler?

**7** \_\_\_\_\_ (10 points)

Montrez que pour tout graphe connexe  $G = (V, E)$  ayant au moins trois sommets, il existe trois sommets distincts  $v_1, v_2$  et  $v_3$  tels que  $(v_1, v_2) \in E$  et  $(v_2, v_3) \in E$ .

**8** \_\_\_\_\_ (10 points)

Soit  $G = (V, E)$  un graphe simple. Le graphe complémentaire de  $G$  est le graphe simple  $\overline{G} = (V, \overline{E})$  tel que  $\overline{E} = \{(u, v) | (u, v) \notin E\}$ . Trouvez une formule générale pour déterminer  $|V|$  à partir de  $|E|$  et  $|\overline{E}|$ . Combien de sommets y-a-t-il si  $G$  possède 15 arêtes et  $\overline{G}$  possède 13 arêtes?

**9** \_\_\_\_\_ (10 points)

Soient  $G$  et  $H$  des graphes simples isomorphes. Montrez que  $\overline{G}$  et  $\overline{H}$ , les graphes complémentaires de  $G$  et  $H$  respectivement, sont aussi isomorphes.

**10** \_\_\_\_\_ (10 points)

Combien de sous-graphes et combien de sous-graphes non isomorphes le graphe  $K_4$  a-t-il?