

Voici quelques mots sur un sujet absent du livre - l'ordre lexicographique et l'ordre canonique.

L'ordre lexicographique

Soit (X, \leq_X) et (Y, \leq_Y) deux ordres partiels (rappel : cela veut dire que \leq_X est une relation binaire transitive, réflexive et antisymétrique sur X (et, de manière analogue, \leq_Y est une telle relation sur Y)). L'ordre lexicographique \preceq sur $X \times Y$ est défini par

$$(x_1, y_1) \preceq (x_2, y_2) \text{ si soit } x_1 \leq_X x_2, \text{ soit } x_1 = x_2 \text{ et } y_1 \leq_Y y_2.$$

Exemple 1 Soit $X = Y = \mathbb{N}$ avec leur ordre normal. Alors dans l'ordre lexicographique \preceq , les couples $(0, i)$ précèdent les couples $(1, i)$, qui précèdent $(2, i)$ etc, pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Exercice 1 Ecrivez les éléments de $A \times B$ dans l'ordre lexicographique si $A = \{1, 2, 5, 9\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ et l'ordre sur A et B est l'ordre habituel.

On peut généraliser ceci.

Définition 1 Soient X_1, \dots, X_k des ensembles partiellement ordonnés par \leq_i , $i = 1, \dots, k$, respectivement, c'est-à-dire, soient (X_i, \leq_i) , $i = 1, \dots, k$ des ordres partiels. L'ordre lexicographique \preceq sur $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k = \prod_{i=1}^k X_i$ est défini par $(x_1, \dots, x_k) \preceq (y_1, \dots, y_k)$ si soit $(x_1, \dots, x_k) = (y_1, \dots, y_k)$, soit il existe un d , $1 \leq d \leq k$ tel que $x_d \leq_d y_d$, $x_d \neq y_d$ et pour tout $i = 1, \dots, d-1$, $x_i = y_i$.

C'est-à-dire, $(x_1, \dots, x_k) \preceq (y_1, \dots, y_k)$ si soit les deux k -uplets sont égaux, soit dans la première coordonnée d où ils diffèrent, $x_d \leq_m y_d$. Rappel: i.e. $x_i = y_i$ pour tout $i = 1, \dots, k$

Exercice 2 Ecrivez l'ensemble $A \times A \times B \times B$ dans l'ordre (en prenant (A, \leq_A) et (B, \leq_B) de l'exercice 1).

Pour des mots on peut généraliser davantage. Rappelons que si Σ est un ensemble fini de lettres ou de symboles, on appelle un élément (k -uplet) de Σ^k un mot ou encore une chaîne et on écrit $a_1 a_2 \dots a_k$ plutôt que (a_1, a_2, \dots, a_k) . On peut donc ordonner Σ^k - l'ensemble des mots de longueur k - par l'ordre lexicographique défini plus haut, pourvu que l'alphabet Σ soit, lui, ordonné par \leq_Σ .

Exercice 3 *Ecrivez les mots de Σ^4 dans l'ordre lexicographique pour $\Sigma = \{a, b, e\}$ avec l'ordre alphabétique normal.*

Si on ramasse maintenant tous les mots sur Σ , on définit l'ensemble (infini) $\Sigma^* = \cup_{k \in \mathbb{N}} \Sigma^k$ (attention, $k = 0$ est permis et le seul mot de Σ^0 est le mot *vide*, noté ε), on peut définir un ordre lexicographique \preceq sur Σ^* .

Soient $a_1 \dots a_k$ et $b_1 \dots b_l$ deux mots sur Σ . Soit $r = \min\{k, l\}$. Soit $d = \min\{1 \leq i \leq r : a_i \neq b_i\}$. Notons que d peut ne pas exister. Alors on définit $a_1 \dots a_k \preceq b_1 \dots b_l$ si soit d existe et $a_d \leq_\Sigma b_d$, soit d n'existe pas et $k \leq l$.

Exercice 4 *Soit $\Sigma = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ avec l'ordre alphabétique. i.e. $\alpha \leq_\Sigma \beta \leq_\Sigma \gamma \leq_\Sigma \delta$. Voici quelques mots dans l'ordre lexicographique:*

$$\alpha, \alpha\beta\beta, \alpha\gamma\beta\alpha\alpha, \alpha\gamma\delta, \beta, \beta\gamma, \gamma\gamma\gamma\alpha, \delta$$

Voici trois définitions équivalentes de l'ordre lexicographique sur Σ^* . Comme avant, soit (Σ, \leq_Σ) un alphabet ordonné et soit Σ^* l'ensemble des mots sur Σ . L'ordre lexicographique \preceq sur Σ^* est alors défini à partir de \leq_Σ :

1. Définition A. Soient $a_1 \dots a_k$ et $b_1 \dots b_l$ deux mots sur Σ . Alors $a_1 \dots a_k \preceq b_1 \dots b_l$ si
 - soit $a_1 \dots a_k = b_1 \dots b_l$;
 - soit $a_1 \dots a_k \neq b_1 \dots b_l$ mais $k < l$ et $a_1 \dots a_k = b_1 \dots b_k$;
 - soit $a_1 \dots a_k = b_1 \dots b_l$ et $k \geq l$, et en plus il existe un d , $1 \leq d \leq l$, tel que $a_1 \dots a_{d-1} = b_1 \dots b_{d-1}$ et $a_d \leq_\Sigma b_d$, $a_d \neq b_d$.
2. Définition B. Soient $a_1 \dots a_k$ et $b_1 \dots b_l$ deux mots sur Σ . Soit $r = \min\{k, l\}$. Alors $a_1 \dots a_k \preceq b_1 \dots b_l$ si
 - soit $a_1 \dots a_r \preceq b_1 \dots b_r$;
 - soit $a_1 \dots a_r = b_1 \dots b_r$ et $k < l$.
3. Définition C. Soient $a_1 \dots a_k$ et $b_1 \dots b_l$ deux mots sur Σ . Soit $r = \min\{k, l\}$. Soit $d = \min\{1 \leq i \leq r : a_i \neq b_i\}$. Alors $a_1 \dots a_k \preceq b_1 \dots b_l$ si
 - soit d existe et $a_d \leq_\Sigma b_d$;

- soit d n'existe pas et $k \leq l$.

Notons que la définition B dépend de la définition 1 et la définition C est celle donnée plus haut dans le texte.

Exercice 5 Assurer vous de comprendre pourquoi les quatre définitions sont équivalentes.

*L'ordre canonique sur Σ^**

L'ordre lexicographique sur Σ^* a un désavantage : si on veut écrire les éléments dans l'ordre, on ne finit jamais d'écrire les mots qui commencent par le premier symbole de Σ . Par exemple, si $\Sigma = \{0, 1\}$ avec l'ordre habituel ($0 \leq 1$), Σ^* dans l'ordre lexicographique commence par ($\varepsilon \preceq u$ pour tout $u \in \Sigma^*$) : $\varepsilon, 0, 00, 000, 0000, 00000, \dots, 00000000000000000000000000000000, \dots$. Il faut donc une autre façon de faire.

Définition 2 Soit Σ un alphabet. L'ordre canonique \sqsubseteq sur Σ^* est défini par $a_1 \dots a_k \sqsubseteq b_1 \dots b_l$ si soit $k < l$, soit $k = l$ et $a_1 \dots a_k \preceq b_1 \dots b_k$ (\preceq est l'ordre lexicographique défini dans la définition 1 sur l'ensemble de mots de la même longueur).

Exemple 2 Reprenons l'exemple de $\{0, 1\}^*$. En ordre canonique, la liste commence par $\varepsilon, 0, 1, 00, 01, 10, 11, 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111, \dots$ et on voit que chaque mots va éventuellement apparaître dans la liste.

Exemple 3 D'une manière semblable, l'ensemble des paires d'entiers naturels $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ peut être ordonné en définissant $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$ si soit $a + b < c + d$, soit $a + b = c + d$ et $a < c$, soit $a + b = c + d$, $a = c$ et $b < d$. C'est-à-dire, $(a, b) \sqsubseteq (c, d)$ si soit $a + b < c + d$, soit $a + b = c + d$ et $(a, b) \preceq (c, d)$.

Exercice 6 Vérifier que les relations \preceq et \sqsubseteq sont des ordres partiels dans chacun des cas mentionnés.

Quelques exemples d'ordres partiels

Soit $\Sigma = \{a, b, \dots, z\}$ l'alphabet habituel avec l'ordre alphabétique habituel. Définissons la relation \preceq_* sur Σ^* par $a_1 \dots a_k \preceq_* b_1 \dots b_l$ si $k \leq l$.

Exercice 7 Prouver que \preceq_* n'est pas un ordre partiel.

Mais on peut en faire un:

Exercice 8 Mettons $a_1 \dots a_k \preceq^* b_1 \dots b_l$ si soit $k < l$, soit $a_1 \dots a_k = b_1 \dots b_l$. Prouvez que \preceq^* est un ordre partiel.

L'ordre partiel de l'exercice précédent a beaucoup de paires d'éléments *incomparables* : tous les mots distincts de la même longueur sont deux-à-deux incomparables.