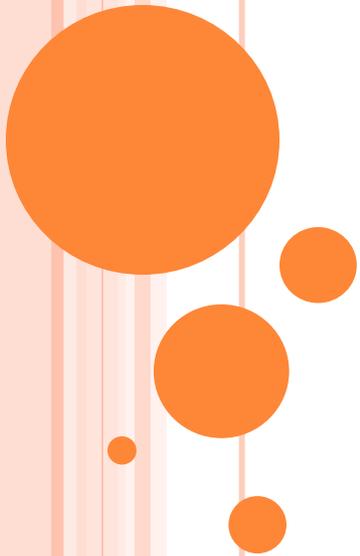


**IFT 1575 MODÈLES DE RECHERCHE
OPÉRATIONNELLE**

Analyse de sensibilité



- **L'analyse de sensibilité** permet d'évaluer la sensibilité de la solution optimale quand certains paramètres changent de valeur.

- Exemples:
 - mesurer les conséquences de la modification du membre de droite d'une contrainte.

 - mesurer les conséquences de la modification d'un coefficient d'une variable dans Z.

 - mesurer les conséquences de la modification de la valeur d'une variable à l'optimum.



Exemple

	A	B	C	D	E	F	G	H	I																												
1	Microsoft Excel 11.0 Rapport de la sensibilité																																				
2	Feuille: [Exo2.xls]Exercice1																																				
3	Date du rapport: 2007-11-18 21:12:57																																				
4																																					
5																																					
6	Cellules variables																																				
7	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Cellule</th> <th>Nom</th> <th>Finale Valeur</th> <th>Réduit Coût</th> <th>Objectif Coefficient</th> <th>Admissible Augmentation</th> <th>Admissible Réduction</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\$C\$13</td> <td>XA</td> <td>75</td> <td>0</td> <td>1</td> <td>1E+30</td> <td>0,2</td> </tr> <tr> <td>\$D\$13</td> <td>XB</td> <td>0</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>1</td> <td>1E+30</td> </tr> <tr> <td>\$E\$13</td> <td>XC</td> <td>0</td> <td>-0,25</td> <td>1</td> <td>0,25</td> <td>1E+30</td> </tr> </tbody> </table>									Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction	\$C\$13	XA	75	0	1	1E+30	0,2	\$D\$13	XB	0	-1	1	1	1E+30	\$E\$13	XC	0	-0,25	1	0,25	1E+30
Cellule	Nom	Finale Valeur	Réduit Coût	Objectif Coefficient	Admissible Augmentation	Admissible Réduction																															
\$C\$13	XA	75	0	1	1E+30	0,2																															
\$D\$13	XB	0	-1	1	1	1E+30																															
\$E\$13	XC	0	-0,25	1	0,25	1E+30																															
8																																					
9																																					
10																																					
11																																					
12																																					
13	Contraintes																																				
14	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Cellule</th> <th>Nom</th> <th>Finale Valeur</th> <th>Ombre Coût</th> <th>Contrainte à droite</th> <th>Admissible Augmentation</th> <th>Admissible Réduction</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>\$C\$19</td> <td>contraintes XA</td> <td>150</td> <td>0,5</td> <td>150</td> <td>90</td> <td>150</td> </tr> <tr> <td>\$C\$20</td> <td>XA</td> <td>112,5</td> <td>0</td> <td>200</td> <td>1E+30</td> <td>87,5</td> </tr> <tr> <td>\$C\$21</td> <td>XA</td> <td>150</td> <td>0</td> <td>240</td> <td>1E+30</td> <td>90</td> </tr> </tbody> </table>									Cellule	Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction	\$C\$19	contraintes XA	150	0,5	150	90	150	\$C\$20	XA	112,5	0	200	1E+30	87,5	\$C\$21	XA	150	0	240	1E+30	90
Cellule	Nom	Finale Valeur	Ombre Coût	Contrainte à droite	Admissible Augmentation	Admissible Réduction																															
\$C\$19	contraintes XA	150	0,5	150	90	150																															
\$C\$20	XA	112,5	0	200	1E+30	87,5																															
\$C\$21	XA	150	0	240	1E+30	90																															
15																																					
16																																					
17																																					
18																																					
19																																					
20																																					



Analyse relative aux contraintes

- Modifier le membre de droite d'une contrainte peut avoir un impact sur:
 - La valeur de la fonction objectif.
 - La valeur des variables.
- Le rapport de sensibilité d'Excel (tableau des contraintes) donne la **valeur marginale** (*Ombre coût*) associée à chaque contrainte; ceci donne l'impact sur la fonction objectif d'augmenter le membre de droite par une unité.
 - Elle ne donne pas la variation dans la solution.



Valeur marginale

- Si on modifie le membre de droite b d'une contrainte par Δ , la valeur de la fonction objectif sera modifiée de $\Delta \cdot \text{valeur marginale}$.
- La valeur marginale reste la même tant que l'on demeure dans l'intervalle admissible (voir augmentation et réduction admissibles).
 - Sinon la déduction n'est pas valide
- Il faut résoudre à nouveau pour connaître les nouvelles valeurs optimales des variables de décision.



Attention

- Ces résultats sont *garantis* lorsque seulement **un seul** membre de droite est modifié.
- Une contrainte non active (*non liée*) a une valeur marginale nulle.
- Dans les variations admissibles:
 - 1E+30 correspond à: $+\infty$
 - 1E-15 correspond à: 0



Analyse relative à la fonction objectif

- Modifier un coefficient de la fonction objectif peut avoir un impact sur :
 - La valeur optimale des variables de décision
 - La valeur optimale de la fonction objectif
- Le rapport de sensibilité d'Excel (**tableau des variables**) donne la variation admissible pour chaque coefficient de sorte que la solution optimale ne change pas.
- La valeur de la fonction objectif se recalcule à l'aide du nouveau profit unitaire.



Analyse relative à la fonction objectif

- Le rapport de sensibilité d'Excel (**tableau des variables**) donne aussi le coût réduit pour chaque variable dans la fonction objectif.
- Les coûts réduits sont associés à la solution optimale. Le coût réduit d'une variable hors-base représente l'effet sur la valeur de la fonction objectif si on modifie la valeur finale de cette variable.
- Le coût réduit d'une variable donne la modification minimale du coefficient de la variable dans la fonction objectif pour qu'il soit rentable d'augmenter la valeur de cette variable.
- Lorsque le coût réduit d'une variable hors base = 0, il peut y avoir plusieurs solutions optimales.



Exemple:

- Un bijoutier a un petit atelier où il fabrique lui-même sur commande des bijoux faits à la main. Il a un bon de commande de 3 types de bagues faites en or blanc et jaune. En stock, il dispose de 150 grammes d'or blanc et 200 grammes d'or jaune. Le tableau suivant donne la composition de chaque modèle de bague (en gramme) et le temps requis pour la fabrication.
- Le bijoutier a 30 jours pour préparer sa commande et ne peut travailler plus de 8 heures par jour. Comme la commande est trop grande il s'entend avec son client pour lui fournir le maximum qu'il peut faire et pour le reste de la commande le client achètera les modèles chez une usine spécialisée.

Modèle	Or blanc	Or jaune	Temps requis
A	2	1.5	2
B	4	0	1.5
C	2.5	1.2	3



Exemple:

- Le modèle proposé pour ce problème est le suivant :
- Max

$$Z = x_A + x_B + x_C$$

$$2x_A + 4x_B + 2,5x_C \leq 150$$

$$1,5x_A + 1,2x_C \leq 200$$

$$2x_A + 1,5x_B + 3x_C \leq 240$$

$$x_A, x_B, x_C \geq 0$$



Exemple:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Microsoft Excel 11.0 Rapport de la sensibilité								
2	Feuille: [Exo2.xls]Exercice1								
3	Date du rapport: 2007-11-18 21:12:57								
4									
5									
6	Cellules variables								
7			Finale	Réduit	Objectif	Admissible	Admissible		
8	Cellule	Nom	Valeur	Coût	Coefficient	Augmentation	Réduction		
9	\$C\$13	XA	75	0	1	1E+30	0,2		
10	\$D\$13	XB	0	-1	1	1	1E+30		
11	\$E\$13	XC	0	-0,25	1	0,25	1E+30		
12									
13	Contraintes								
14			Finale	Ombre	Contrainte	Admissible	Admissible		
15	Cellule	Nom	Valeur	Coût	à droite	Augmentation	Réduction		
16	\$C\$19	contraintes XA	150	0,5	150	90	150		
17	\$C\$20	XA	112,5	0	200	1E+30	87,5		
18	\$C\$21	XA	150	0	240	1E+30	90		
19									
20									

Exemple:

Q: Si le bijoutier décide de travailler deux heures de plus chaque jour, qu'elle sera sa nouvelle capacité de production? Comment pouvez vous expliquer ce résultat?

- Si le bijoutier travail 2 heures de plus par jour, alors en 30 jours il travaillera 60 heures de plus. Donc la 3eme contrainte devient :

$$2x_A + 1,5x_B + 3x_C \leq 300$$

- D'après la rapport de sensibilité cette augmentation est dans l'intervalle admissible : $[90, \text{inf}]$ donc en regardant l'ombre coût de cette contrainte qui est 0 on peut conclure qu'il n'y a pas de changement dans la valeur de la fonction objective. La solution reste la même.



Exemple:

Q: Le client veut au moins 10 bagues de modèle B. En utilisant le rapport de sensibilité, qu'elle sont les changements dans la solution ?

- D'après le rapport de sensibilité, le coût réduit de la variables x_B est égal a -1 donc si on produit 10 unités du modèle B alors la production total diminue de 10 unités.
- En effet si on ajoute la contrainte $x_B \geq 10$, la nouvelle solution est : $x_A = 55, x_B = 10, x_C = 0$ et $Z = 65$.

