

## Démonstration 10

1. Dans une épicerie, l'arrivée des clients à la caisse suit une loi de Poisson et le taux moyen d'arrivée est de 5 clients à toutes les 30 minutes. Par ailleurs, le temps moyen de service (pour enregistrer les achats) est de 4.5 minutes et ce temps de service suit une loi exponentielle.
- Quel est le temps d'attente moyen pour chaque client?
  - Pendant combien de temps en moyenne le caissier sera-t-il occupé à servir les clients au cours d'une heure de travail?
  - Suite à une amélioration dans les techniques d'enregistrement des achats, le temps moyen de service a été réduit de 0.5 minute. Quel sera maintenant le temps d'attente moyen pour chaque client?

**Solution.**

Notons d'abord que :

$$\lambda = 1/6 \text{ par minute; } 1/\mu = 9/2 \leftrightarrow \mu = 2/9 \text{ par minute; } \rho = \lambda/\mu = 1/6 \cdot 9/2 = 3/4.$$

$$(a) \quad W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1/6}{2/9(2/9 - 1/6)} = 81/6 = 13.5 \text{ minutes}$$

(b) Puisque  $\rho = 3/4$ , la réponse est  $3/4$  heure.

$$(c) \quad \lambda = 1/6; \quad \mu = 1/4; \quad \rho = \lambda/\mu = 1/6 \cdot 4 = 2/3$$

$$W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{1/6}{1/4(1/4 - 1/6)} = 8 \text{ minutes}$$

2. Les arrivées à une cabine téléphonique obéissent à une loi de Poisson avec un temps moyen de 10 minutes entre chaque arrivée. La longueur d'un appel téléphonique suit une loi exponentielle avec un temps moyen d'appel de 3 minutes.
- Quelle est la probabilité qu'une personne qui arrive à la cabine téléphonique ait à attendre?
  - Quelle est la longueur moyenne de la file d'attente?
  - La compagnie de téléphone est prête à installer un deuxième téléphone dans la cabine quand les clients auront à attendre au moins 3 minutes en moyenne avant de pouvoir téléphoner. Quel devra être le taux moyen d'arrivée pour justifier l'installation d'un second téléphone ?

- (d) Si la compagnie décide d'installer un deuxième téléphone dans la cabine même si les clients arrivent seulement à toutes les 10 minutes en moyenne, quel sera alors le temps d'attente moyen pour chaque client?

**Solution.**

- (a) probabilité d'attendre

= probabilité qu'il y ait au moins une personne dans le système

=  $1 - \text{probabilité qu'il n'y ait aucune personne dans le système}$

$$= 1 - P_0 = 1 - (1 - \rho) = \rho$$

$$\text{avec } \rho = \lambda/\mu = \frac{1/10}{1/3} = 3/10 = 0.3$$

$$(b) L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{(1/10)^2}{1/3(1/3 - 1/10)} = \frac{1/100}{7/90} = 9/70 \cong 0.13 \text{ personne}$$

$$(c) W_q = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{\lambda}{1/3(1/3 - \lambda)} = 3 \leftrightarrow \lambda = 1/3 - \lambda \leftrightarrow \lambda = 1/6 \text{ par minute.}$$

- (d) Nous avons

$$W_q = \frac{P_0(\lambda/\mu)^2 \rho}{\lambda 2! (1 - \rho)^2}$$

avec

$$\rho = \lambda/2\mu = 3/20$$

$$\begin{aligned} P_0 &= \frac{1}{1 + \lambda/\mu + \left[ \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} \cdot \frac{1}{1 - \rho} \right]} \\ &= \frac{1}{1 + 3/10 + \left[ \frac{(3/10)^2}{2} \cdot \frac{20}{17} \right]} \\ &= \frac{1}{1 + 3/10 + 9/170} = \frac{170}{230} \cong 0.74 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } W_q &= \frac{17/23 \cdot (3/10)^2 \cdot 3/20}{1/10 \cdot 2 \cdot (17/20)^2} = \frac{17/23 \cdot 9/100 \cdot 3/20}{2/10 \cdot 289/400} \\ &= \frac{459 \cdot 4000}{46000 \cdot 578} = \frac{1836}{26588} \cong 0.07 \text{ minute (ou 4.2 secondes).} \end{aligned}$$

3. Une chaîne de restauration rapide de type « service au comptoir pour emporter » emploie trois caissiers pour servir les clients à l'un de ses comptoirs. Les clients se présentent selon une loi de Poisson à un taux moyen de 4 clients à la minute. Par ailleurs, le temps de service obéit à une loi exponentielle avec un temps moyen de service de 30 secondes. En prenant les minutes comme unités de temps, répondre aux questions suivantes :

- Identifier la distribution de probabilités pour le nombre de clients présents dans le système.
- Calculer le nombre moyen de clients dans la file d'attente et le temps moyen d'attente.
- Calculer le nombre moyen de clients dans le système ainsi que le temps moyen qu'un client passe à l'intérieur du système.

**Solution.**

$$(a) \quad P_0 = \frac{1}{\left[ \sum_{n=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \right] + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \cdot \frac{1}{(1-\rho)}} = \frac{1}{[1 + 2 + 2] + \frac{8}{6} \cdot \frac{1}{(1-4/6)}} = \frac{1}{9}$$

$$P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \cdot P_0, \quad n = 1, 2; \quad P_n = \frac{(\lambda/\mu)^n}{3^{n-3} 3!} \cdot P_0, \quad n \geq 3$$

Donc,

$$P_1 = \frac{(4/2)^1}{1!} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}; \quad P_2 = \frac{(4/2)^2}{2!} \cdot \frac{1}{9} = \frac{2}{9}$$

$$P_n = \frac{2^n}{3^{n-3} \cdot 6} \cdot \frac{1}{9} = \frac{27}{6} \cdot \frac{1}{9} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \quad n \geq 3.$$

(b) nombre moyen de clients dans la file d'attente :

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^s \rho}{s! (1-\rho)^2} = \frac{\frac{1}{9} \cdot (2)^3 \cdot \frac{4}{6}}{3! \left(1 - \frac{4}{6}\right)^2} = \frac{32}{54} \cdot \frac{9}{6} = \frac{8}{9}$$

temps d'attente moyen :

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{8}{9 \cdot 4} = \frac{2}{9}$$

(c) temps moyen passé dans la banque :

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = \frac{2}{9} + \frac{1}{2} = \frac{13}{18}$$

nombre moyen de clients dans la banque :

$$L = \lambda W = 4 \cdot \frac{13}{18} = \frac{26}{9}$$

4. Une banque n'a qu'un seul guichet ouvert entre 17H00 et 18H00 et le temps de service au guichet obéit à une loi exponentielle avec un temps moyen de service de 30 secondes. L'arrivée des clients obéit à une loi de Poisson et le temps moyen entre l'arrivée de deux clients est de 40 secondes. L'objectif de la direction est qu'il n'y ait pas plus de trois clients en attente 90% du temps. Que doit-elle faire?

**Solution.**

Actuellement, le système est de type M/M/1 et présente les caractéristiques suivantes

- $\lambda = 1.5$  clients par minute
- $\mu = 2$  clients par minute
- $\rho = \lambda/\mu = 0.75$
- $L = \lambda/(\mu-\lambda) = 3$  clients
- $W = 1/(\mu-\lambda) = 2$  minutes
- $L_q = \lambda^2/\mu(\mu-\lambda) = 2.25$  clients
- $W_q = L_q/\lambda = 1.5$  minute
- $P_0 = 1 - \rho = 0.25$

Ensuite, puisque  $P_n = C_n P_0$  avec  $C_n = (\lambda/\mu)^n = \rho^n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , nous avons :

$$P_1 = \rho(1 - \rho) = 0.1875$$

$$P_2 = \rho^2(1 - \rho) = 0.1406$$

$$P_3 = \rho^3(1 - \rho) = 0.1055$$

$$P_4 = \rho^4(1 - \rho) = 0.0791$$

et la probabilité qu'il y ait plus de 4 clients dans le système, soit plus de 3 clients dans la file d'attente, est de  $1 - \sum_{n=0}^4 P_n = 1 - 0.7627 = 0.2373$ .

Clairement l'objectif de la direction n'est pas atteint dans la situation actuelle, avec une probabilité supérieure à 20% qu'il y ait plus de 3 clients dans la file d'attente. Supposons que l'on ouvre un deuxième guichet. Pour ce système, qui est maintenant de type M/M/2, nous avons :

$$\rho = \lambda/2\mu = 0.375$$

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{n=0}^1 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!(1-\rho)}} = \frac{1}{1 + 0,75 + 0,45} = 0.4545$$

Puisque  $P_n = C_n' P_0$ ,  $n=1, 2, \dots$ , avec

$$C_n' = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!}, & 1 \leq n \leq s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s^{n-s} s!}, & n \geq s \end{cases}$$

nous avons

$$C_1' = 0.75 \quad P_1 = C_1' P_0 = 0.3409$$

$$C_2' = 0.2813 \quad P_2 = C_2' P_0 = 0.1278$$

$$C_3' = 0.1055 \quad P_3 = C_3' P_0 = 0.0479$$

$$C_4' = 0.0392 \quad P_4 = C_4' P_0 = 0.0180$$

$$C_5' = 0.0147 \quad P_5 = C_5' P_0 = 0.0067$$

Donc, la probabilité qu'il y ait plus de cinq clients dans le système, soit plus de trois clients dans la file d'attente, est de  $1 - \sum_{n=0}^5 P_n = 1 - 0.9958 = 0.0042$ .

L'objectif est donc atteint car il y aura plus de trois clients en attente moins de 1% du temps. Par ailleurs :

$$L_q = \frac{P_0 (\lambda/\mu)^2 \rho}{s! (1-\rho)^2} = 0.1227 \text{ client}$$

$$W_q = L_q / \lambda = 0.0818 \text{ minute}$$

$$L = L_q + \lambda/\mu = 0.8727 \text{ client}$$

$$W = L/\lambda = 0.5818 \text{ minute}$$

5. Soit le problème du camelot qui doit commander ses journaux la veille afin de les vendre le lendemain. Dénotons :

$x$  quantité de journaux commandés par le camelot  
 $c$  coût unitaire de chaque journal  
 $p$  prix unitaire de vente de chaque journal

Supposons que  $p = 2c$  et que la demande  $D$  en journaux est une variable aléatoire discrète telle que :

$$P_D(2) = P\{D = 2\} = a$$

$$P_D(3) = P\{D = 3\} = a$$

$$P_D(4) = P\{D = 4\} = (1 - 2a)$$

- (a) Pour le problème présenté plus haut, écrire la formule permettant de déterminer la quantité optimale  $x^*$  de journaux à commander par le camelot afin qu'il maximise son profit espéré.
- (b) Étant donné  $c$ ,  $p$  et  $P_D(d)$  tels que définis plus haut, déterminer l'intervalle  $[u, v]$  pour les valeurs de  $a$  qui assurent que  $x^* = 3$  (i.e., si  $a \in [u, v]$ , alors  $x^* = 3$ ).

**Solution.**

$$(a) \quad \text{Max}_{2 \leq x \leq 4} \{A(x)\} = \text{Max}_{2 \leq x \leq 4} \left\{ -cx + 2c \sum_{d=2}^4 \min\{d, x\} P_D(d) \right\}$$

$$(b) \quad A(2) = -2c + 2c (a \min\{2, 2\} + a \min\{3, 2\} + (1-2a) \min\{4, 2\}) \\ = -2c + 2c \cdot 2 = 2c$$

$$A(3) = -3c + 2c (a \min\{2, 3\} + a \min\{3, 3\} + (1-2a) \min\{4, 3\}) \\ = -3c + 2c (2a + 3a + 3 - 6a) = 3c - 2ac$$

$$A(4) = -4c + 2c (a \min\{2, 4\} + a \min\{3, 4\} + (1-2a) \min\{4, 4\}) \\ = -4c + 2c (2a + 3a + 4 - 8a) = 4c - 6ac$$

Ainsi,

$$A(3) \geq A(2) \Leftrightarrow 3c - 2ac \geq 2c \Leftrightarrow 2a \leq 1 \Leftrightarrow a \leq \frac{1}{2}$$

$$A(3) \geq A(4) \Leftrightarrow 3c - 2ac \geq 4c - 6ac \Leftrightarrow 4a \geq 1 \Leftrightarrow a \geq \frac{1}{4}$$

Donc  $a \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}]$ .