

Démonstration 4

1. Fournir un modèle de programmation linéaire équivalent au modèle suivant, où $|x|$ correspond à la valeur absolue de x .

$$\begin{aligned} \text{Min } & |x_1| + |x_2| + |x_3| \\ \text{s.a. } & \\ & x_1 + x_2 \leq 1 \\ & 2x_1 + x_3 = 3 \end{aligned}$$

Solution.

On pose d'abord:

$$x_i = x_{i1} - x_{i2}, \quad x_{i1}, x_{i2} \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

Puisque x_{i1} et x_{i2} ne peuvent se retrouver toutes deux dans la même base et jouer le rôle de variables dépendantes dans le tableau du simplexe associé à cette base, et ce, quelle que soit la base et quel que soit i (car la base serait alors une matrice singulière), au moins l'une des deux variables a une valeur nulle dans le tableau optimal.

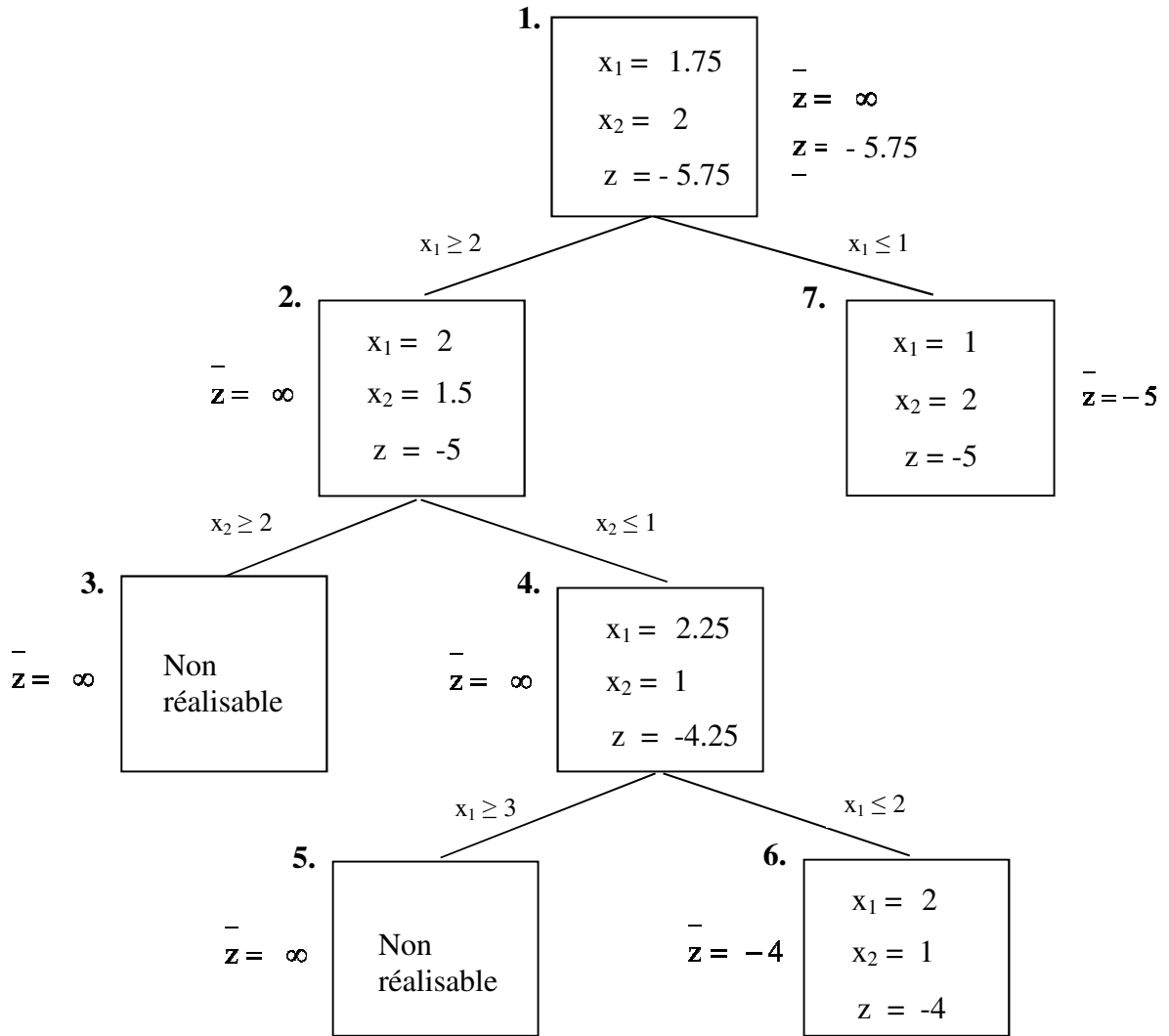
Cette observation nous permet de formuler le problème ainsi :

$$\begin{aligned} \text{Min } & x_{11} + x_{12} + x_{21} + x_{22} + x_{31} + x_{32} \\ \text{s.a. } & \\ & x_{11} - x_{12} + x_{21} - x_{22} \leq 1 \\ & 2x_{11} - 2x_{12} + x_{31} - x_{32} = 3 \\ & x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} \geq 0 \end{aligned}$$

2. Résoudre le problème de programmation linéaire en nombres entiers (PLE) suivant avec la méthode de branch-and-bound.

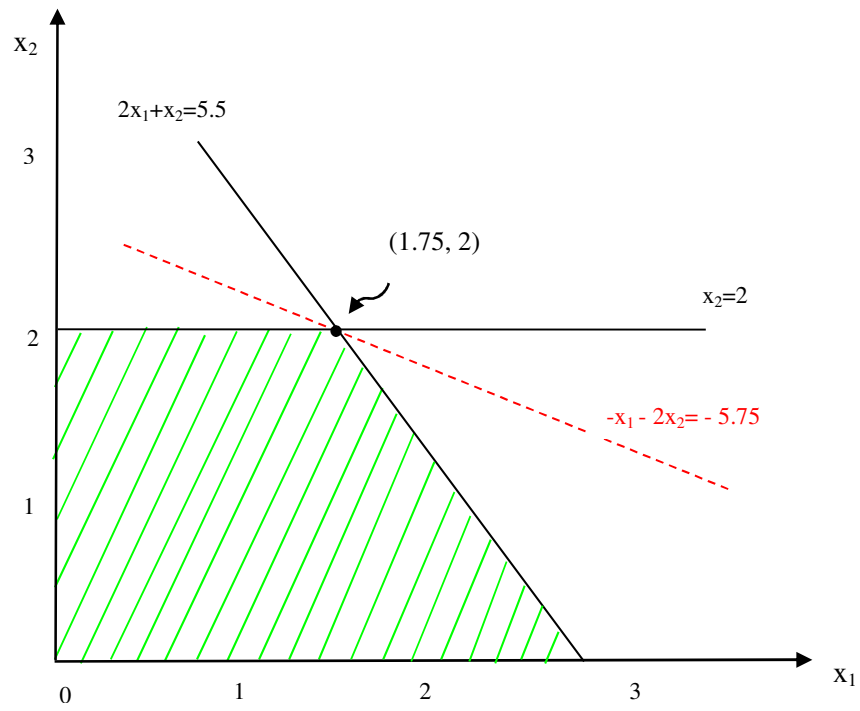
$$\begin{aligned} \text{Min } z & = -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a. } & \\ & 2x_1 + x_2 \leq 5.5 \\ & x_2 \leq 2 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entiers.} \end{aligned}$$

Solution.

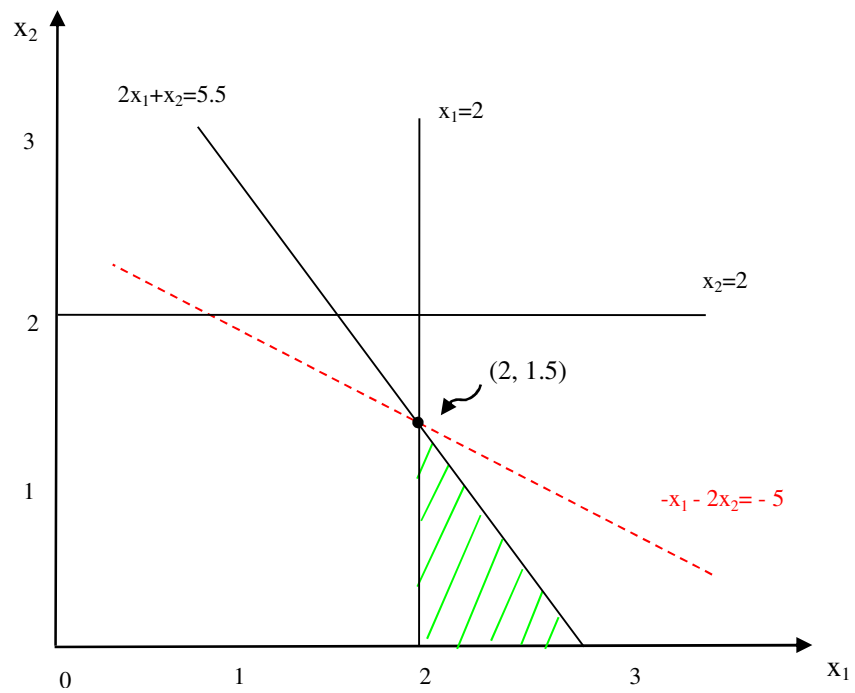


La solution optimale est donc $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ et la valeur de cette solution est $z = -5$.
 Nous présentons dans la suite, la résolution graphique de chacun des sous-problèmes.

Problème 1.

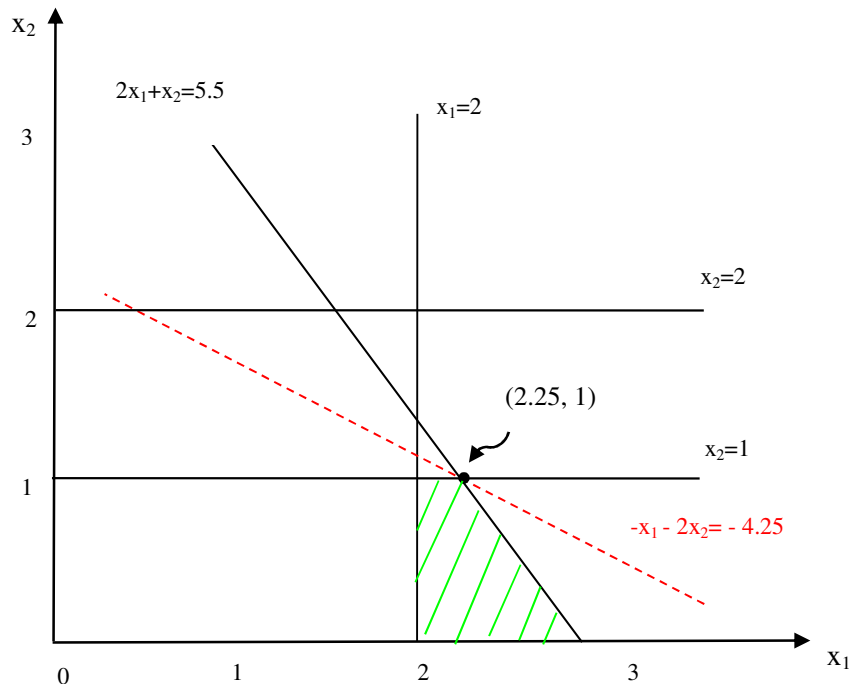


Problème 2.



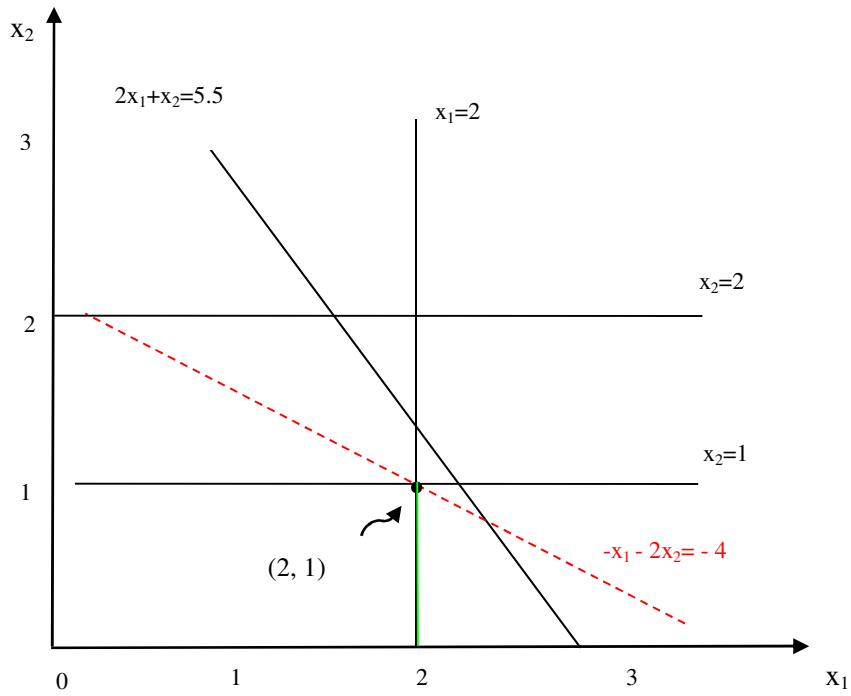
Problème 3. Le domaine réalisable est vide.

Problème 4.

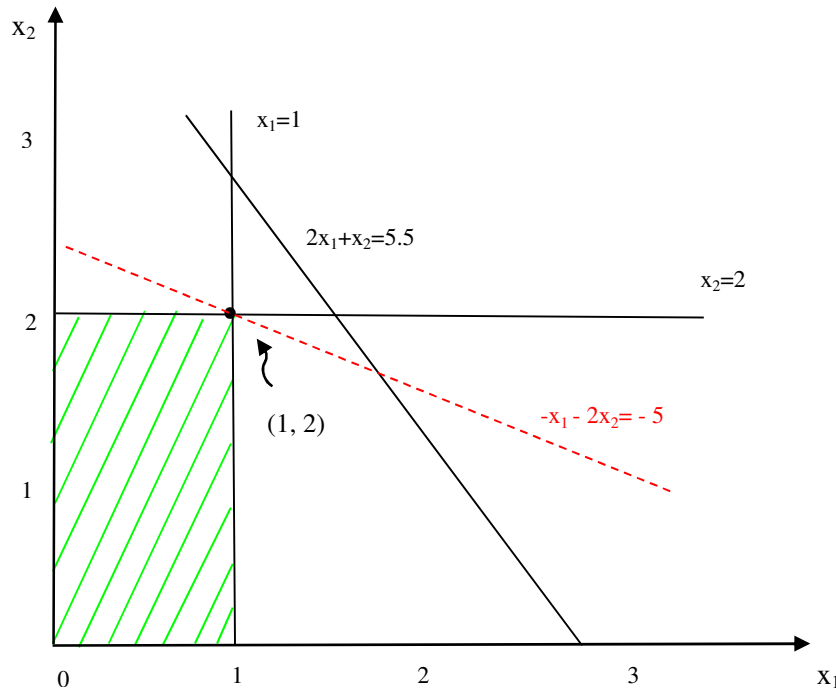


Problème 5. Le domaine réalisable est vide.

Problème 6.



Problème 7.



3. Une compagnie aérienne veut acheter des avions qui diffèrent selon la capacité qui est soit *Grande*, *Moyenne* ou *Petite*. Les coûts de chaque type d'avion sont de 33 500 000\$, 25 000 000\$ et 17 000 000\$, respectivement, et le coût total d'achat ne doit pas dépasser 750 000 000\$. Par ailleurs, le profit associé à l'exploitation de chaque type d'avion au cours d'une année est de 2 100 000\$, 1 500 000\$ et 1 150 000\$, respectivement.

La compagnie dispose d'un nombre de pilotes lui permettant d'opérer 30 nouveaux avions et dispose de ressources suffisantes pour assurer l'entretien de 40 nouveaux avions de *Petite* capacité. En termes de ressources d'entretien, les avions de *Grande* et *Moyenne* capacité requièrent des ressources qui équivalent à celles de $1\frac{2}{3}$ et $1\frac{1}{3}$ avion de *Petite* capacité, respectivement.

La compagnie veut connaître le nombre d'avions de chaque type qu'il faut acheter de façon à maximiser son profit.

- Modéliser le problème comme un PLE
- Résoudre le PLE

Solution.

- Modéliser le problème comme un PLE

i) <i>Actions ou activités</i>	<i>Niveau</i>
achat d'avions de <i>Grande</i> capacité	x_1
achat d'avions de <i>Moyenne</i> capacité	x_2
achat d'avions de <i>Petite</i> capacité	x_3

ii) *Fonction économique* ($\times 1\,000\,000$ \$)

maximiser le profit annuel

$$\text{Max } 2.1 x_1 + 1.5 x_2 + 1.15 x_3$$

iii) *Contraintes*

- nombre de pilotes

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$$

- coût d'achat

$$33.5 x_1 + 25 x_2 + 17 x_3 \leq 750$$

- ressources d'entretien

$$1 \frac{2}{3} x_1 + 1 \frac{1}{3} x_2 + x_3 \leq 40$$

iv) *Modèle*

$$\text{Max } 2.1 x_1 + 1.5 x_2 + 1.15 x_3$$

s.a.

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 30$$

$$33.5 x_1 + 25 x_2 + 17 x_3 \leq 750$$

$$1 \frac{2}{3} x_1 + 1 \frac{1}{3} x_2 + x_3 \leq 40$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0 \text{ et entiers.}$$

(b) Résoudre le PLE

On transforme d'abord le problème de maximisation en un problème de minimisation :

$$\text{Min } -2.1 x_1 - 1.5 x_2 - 1.15 x_3.$$

Après avoir introduit des variables d'écart pour transformer les contraintes de type \leq en égalités et relaxé les contraintes d'intégralité sur les variables x_1 , x_2 et x_3 , l'algorithme du simplexe produit la solution suivante:

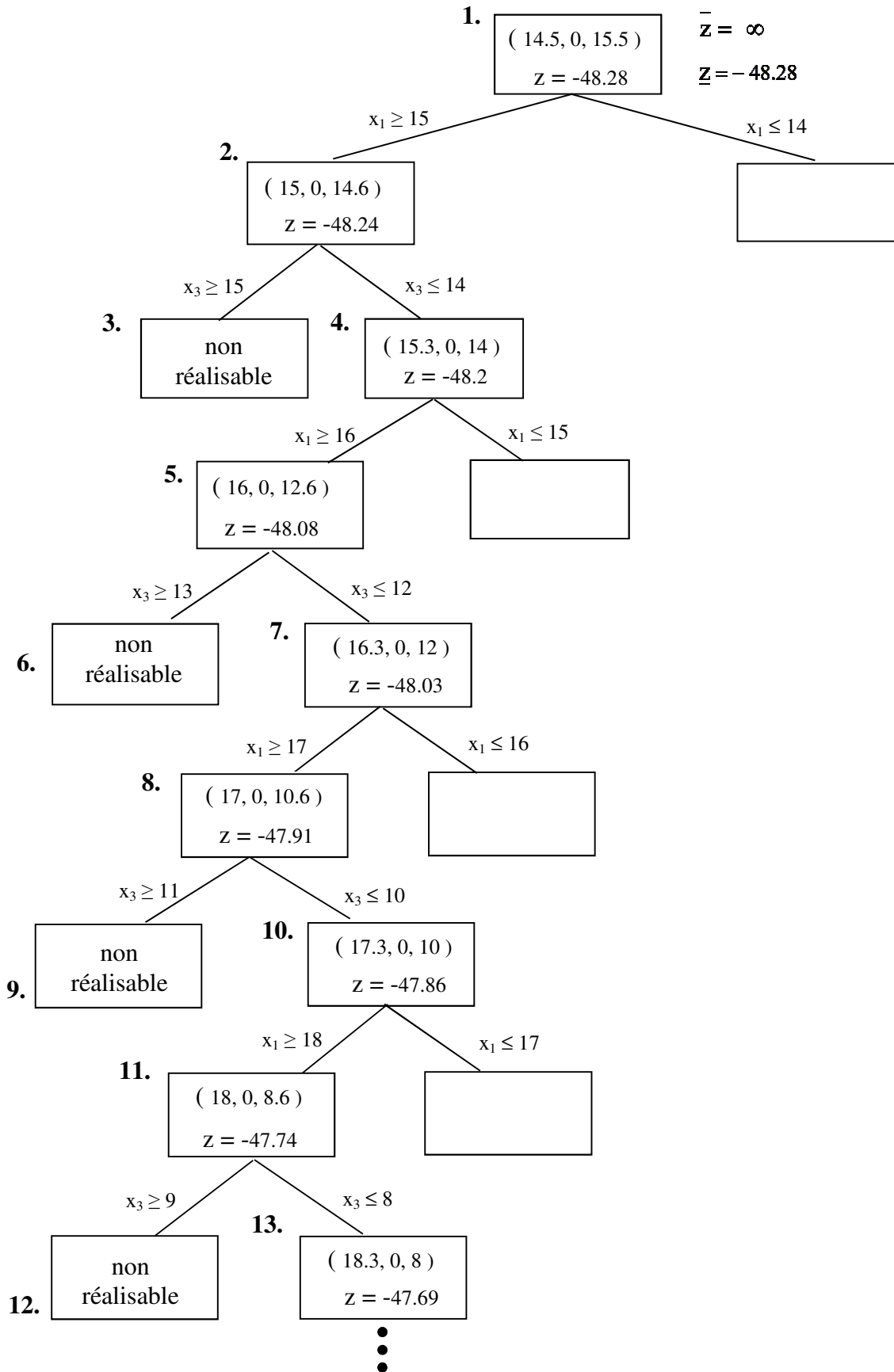
$$x_1 = 14.5$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 = 15.5$$

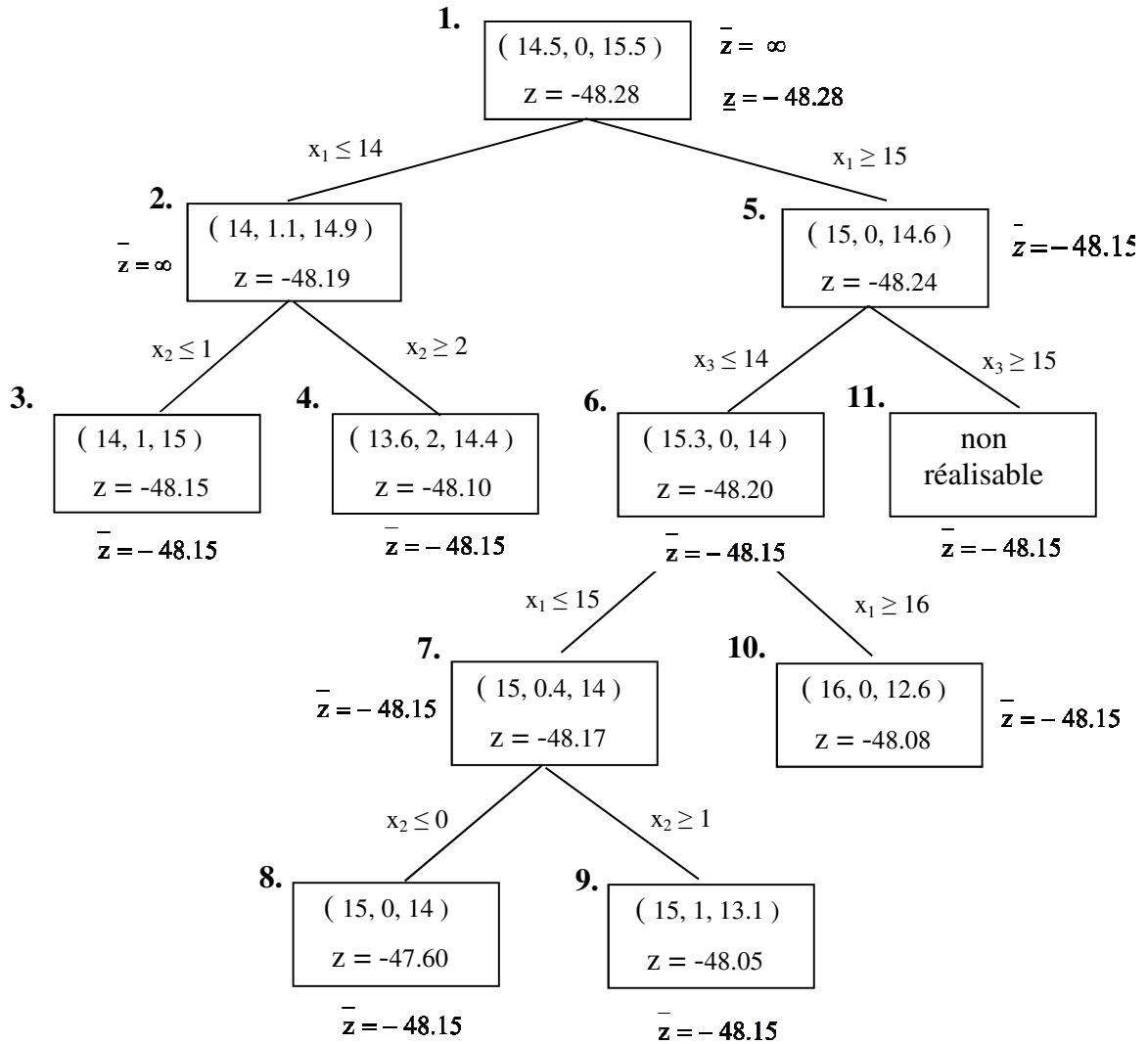
dont la valeur est $z = -48.28$.

Puisque cette solution n'est pas entière, il faut appliquer l'algorithme de branch-and-bound (où chacun des sous-problèmes est résolu avec l'algorithme du simplexe). En plaçant les contraintes de type \geq et \leq dans les branches gauche et droite, respectivement, on obtient l'arbre illustré à la page suivante, où la solution à chaque noeud est représentée par le vecteur (x_1, x_2, x_3) .



Comme on le voit, la résolution peut être très longue. Ici, nous avons arrêté l'exploration après la résolution du sous-problème 13. Les sous-problèmes ouverts (non encore résolus) sont représentés par des nœuds vides.

Si on inverse les contraintes de type \leq et \geq lors de la recherche d'une solution (c'est-à-dire, si on place les contraintes de type \leq et \geq dans les branches gauche et droite, respectivement), on obtient alors l'arbre suivant:



La solution optimale est donc $x_1 = 14$, $x_2 = 1$, $x_3 = 15$ et la valeur de cette solution est $z = -48.15$.

4. Soit le problème suivant avec $k \geq 0$:

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= -x_1 - 2x_2 \\ \text{s.a.} \quad & -x_1 + x_2 \leq 2 \\ & x_2 \leq 3 \\ & kx_1 + x_2 \leq 2k + 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Soit maintenant la solution $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. À l'aide d'une analyse graphique, déterminer les valeurs de k permettant d'assurer que cette solution est optimale.

Solution.

Notons tout d'abord que le point $(2, 3)$ est toujours réalisable quelle que soit la valeur de k . En effet, les deux premières contraintes sont vérifiées et la troisième contrainte devient alors $2k + 3 \leq 2k + 3$ qui est nécessairement vérifiée. Par ailleurs, puisque la droite $kx_1 + x_2 = 2k + 3 \leftrightarrow x_2 = -kx_1 + (2k + 3)$ est de pente $-k$ et qu'elle passe toujours par le point $(2, 3)$, toute modification de la valeur de k entraîne une rotation de cette droite autour du point $(2, 3)$.

Notons enfin que pour la pente $-k = -1/2$, la droite correspondant à la troisième contrainte devient $1/2 x_1 + x_2 = 4 \leftrightarrow x_1 + 2x_2 = 8 \leftrightarrow -x_1 - 2x_2 = -8$ et elle se confond ainsi avec la droite de la fonction objectif lorsque $z = -8$.

Tel qu'illustré dans les deux figures suivantes, le point $(2,3)$ est optimal en autant que la pente de la droite correspondant à la troisième contrainte demeure plus petite ou égale à $-1/2$. Autrement dit, lorsque $-k \leq -1/2 \leftrightarrow k \geq 1/2$.

