

Devoir #2

1. (20 points) Une fonction $f(x)$ prend les valeurs suivantes en $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ et $x_3 = 1$:

$$f(-1) = -8, f(0) = 4, f(1) = 6.$$

Écrire un modèle de programmation linéaire permettant d'identifier une fonction de la forme $g(x) = t_0 + t_1 \cdot x$ telle que l'écart maximal avec la fonction $f(x)$ en x_1 , x_2 et x_3 soit minimal. Notez que l'écart doit toujours correspondre à une valeur non négative. Par exemple, si $f(x_1) < g(x_1)$, alors l'écart correspond à $g(x_1) - f(x_1)$, autrement l'écart correspond à $f(x_1) - g(x_1)$. Par ailleurs, il est permis d'introduire des variables qui ne sont pas contraintes à la non négativité dans le modèle.

2. (25 points). Soit le problème

$$\text{Min } z = -6x_1 - x_2 - 2x_3$$

s.a.

$$2x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 2$$

$$-4x_1 - 2x_2 - \frac{3}{2}x_3 \leq 3$$

$$x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3 \leq 1$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

On introduit alors les variables x_4 , x_5 et x_6 comme variables d'écart dans les première, deuxième et troisième contraintes, respectivement, afin d'obtenir une forme standard. À l'optimum, une partie du tableau du simplexe est le suivant :

v.d.	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	-z	t.d.
x_5				1	1	2		
x_3				-2	0	4		
x_1				1	0	-1		
-z				2	0	2	1	

- (a) (20 points) Compléter ce tableau en exploitant seulement les informations contenues dans le tableau initial (i.e., sans appliquer l'algorithme du simplexe). Décrivez chacune des étapes.
- (b) (5 points) Si on modifie les termes de droite dans le tableau initial avec le vecteur de perturbation $\Delta \mathbf{b}^T = [1 \ -1 \ 1]$, est-ce que la base optimale pour le problème original demeure optimale pour le nouveau problème? Quelle est la nouvelle solution et la valeur de cette solution? Dans chacun des cas, il faut justifier votre réponse.

3. (15 points) Soit le tableau suivant associé à une certaine base B:

v.d.	x_1	x_2	\dots	x_n	$-z$	t.d.
x_B	\bar{A}					\bar{b}
$-z$	\bar{c}^T				1	$-\bar{z}$

Tableau associé à la base B

Expliquer comment on peut générer le tableau initial illustré plus bas à partir du tableau associé à la base B, si on connaît la base B et le vecteur des multiplicateurs du simplexe Π^T .

v.d.	x_1	x_2	\dots	x_n	$-z$	t.d.
	A					b
$-z$	c^T				1	0

Tableau initial

4. (15 points) Soit le problème :

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= -5x_1 - 3x_2 - 6x_3 \\ \text{s.a.} \quad & 3x_1 + x_2 + 3x_3 + u = 30 \\ & 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + p = 40 \\ & x_1, x_2, x_3, u, p \geq 0 \end{aligned}$$

À l'optimum, on a le tableau suivant :

v.d.	x_1	x_2	x_3	u	p	$-z$	t.d.
x_3	4/3		1	2/3	-1/3		20/3
x_2	-1	1		-1	1		10
$-z$				1	1	1	70

qui correspond à la solution $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = 20/3$, $u = 0$, $p = 0$. Cette solution est de valeur $z = -70$.

- (a) (5 points) Identifier la ou les caractéristiques de ce tableau permettant d'affirmer qu'il existe plusieurs solutions optimales différentes de valeur $z = -70$. Fournir une explication.
- (b) (10 points) Produire un autre tableau optimal à partir de ce tableau, de façon à identifier une nouvelle solution optimale.

5. (25 points) Soit le problème de programmation linéaire en nombres entiers suivant :

$$\begin{aligned} \text{Min } z &= -2x_1 - 3x_2 \\ \text{s.a.} \quad & x_1 + 3x_2 \leq 7.5 \\ & x_1 \leq 5 \\ & x_2 \leq 1 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \text{ et entiers.} \end{aligned}$$

Résoudre ce problème à l'aide de la méthode de branch-and-bound en faisant appel à la résolution graphique pour trouver la solution de chacun des sous-problèmes.

À remettre le mercredi 22 février à la période de cours