

Analyse de sensibilité

Modification d'un coût dans la ligne de l'objectif

Soit $\tilde{c}_j = c_j + \Delta c_j$ pour un certain indice $j = 1, \dots, n$.

Alors, dans le tableau du simplexe associé à la base optimale, nous avons :

$$\tilde{\bar{c}}_j = \tilde{c}_j - \Pi^T a_{\bullet j} = (c_j + \Delta c_j) - \Pi^T a_{\bullet j} = c_j - \Pi^T a_{\bullet j} + \Delta c_j = \bar{c}_j + \Delta c_j$$

- si x_j est une variable qu'on ne retrouve pas dans la base optimale (variable hors-base), la base demeure optimale et la solution optimale demeure la même si $\bar{c}_j + \Delta c_j \geq 0$. Sinon, il faut poursuivre l'algorithme du simplexe.
- si x_j est une variable qu'on retrouve dans la base optimale (variable de base), alors

$$\bar{c}_j + \Delta c_j = 0 + \Delta c_j = \Delta c_j.$$

Puisque le coût de x_j doit être égal à 0 dans le tableau optimal, il faut éliminer Δc_j . Cette procédure entraîne une modification des coûts des variables hors-base ainsi que de la valeur de l'objectif. Si les coûts demeurent non négatifs, alors la base demeure optimale et la solution optimale demeure la même (mais la valeur de l'objectif change). Sinon, il faut poursuivre l'algorithme du simplexe.

Exemple du restaurateur.

Si on modifie le coût de la variable y dans le tableau initial, qui devient $c_y + \Delta c_y$, alors Δc_y apparaîtra sous cette variable dans le tableau optimal, puisqu'il s'agit d'une variable qu'on retrouve dans la base optimale.

| v.d. | x | y | u | p | h | -z | t.d. |
|------|---|--------------|-------|---|------|----|------|
| x | 1 | | 1/4 | | -1/4 | | 3 |
| p | | | -1/4 | 1 | -3/4 | | 3 |
| y | | 1 | -1/12 | | 5/12 | | 5 |
| -z | | Δc_y | 3/2 | | 1/2 | 1 | 54 |

On peut éliminer Δc_y en multipliant la ligne de la variable y (qui est variable dépendante dans la troisième ligne du tableau optimal) par Δc_y et en soustrayant la ligne obtenue de la ligne de l'objectif. On obtient :

| v.d. | x | y | u | p | h | -z | t.d. |
|------|---|---|---------------------------------------|---|--|----|--------------------|
| x | 1 | | 1/4 | | -1/4 | | 3 |
| p | | | -1/4 | 1 | -3/4 | | 3 |
| y | | 1 | -1/12 | | 5/12 | | 5 |
| -z | | | $\frac{3}{2} + \frac{\Delta c_y}{12}$ | | $\frac{1}{2} - \frac{5\Delta c_y}{12}$ | 1 | $54 - 5\Delta c_y$ |

Ainsi, la base demeure optimale, la solution optimale demeure la même (mais la valeur de l'objectif change) si

$$\frac{3}{2} + \frac{\Delta c_y}{12} \geq 0 \Leftrightarrow \Delta c_y \geq -18 \quad \text{et} \quad \frac{1}{2} - \frac{5\Delta c_y}{12} \geq 0 \Leftrightarrow \Delta c_y \leq \frac{6}{5}$$

ou encore

$$-18 \leq \Delta c_y \leq \frac{6}{5}$$

Sinon, il faut poursuivre l'algorithme du simplexe.

Modification d'un coefficient dans la matrice des contraintes

(pour les variables hors-base seulement)

Supposons que le coefficient a_{ij} sous une variable x_j qu'on ne retrouve pas dans la base optimale devient $a_{ij} + \Delta a_{ij}$. Alors, la base demeure optimale et la solution optimale demeure la même si :

$$\bar{c}_j = c_j - \Pi^T \left(\begin{bmatrix} a_{1j} \\ \dots \\ a_{ij} \\ \dots \\ a_{mj} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \Delta a_{ij} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \right) = c_j - \Pi^T a_{\bullet j} - \Pi^T \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ \Delta a_{ij} \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} = \bar{c}_j - \Pi_i \Delta a_{ij} \geq 0.$$

Ainsi,

- si $\Pi_i > 0$, il faut que $\Delta a_{ij} \leq \frac{\bar{c}_j}{\Pi_i}$.
- si $\Pi_i < 0$, il faut que $\Delta a_{ij} \geq \frac{\bar{c}_j}{\Pi_i}$.
- si $\Pi_i = 0$, Δa_{ij} peut être quelconque.

Sinon, il faut poursuivre l'algorithme du simplexe.