

Démonstration 1 (solutions)

IFT2102

13 janvier 2006

Preuve par induction simple

Montrer, par induction simple, que la fonction suivante calcule $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $f(a, b) \leq 2^k \max(a, b)$.

```
fonction bateau( a :entier, b :entier ) : entier
var x,y : entier;
debut
x := a;
y := b;
```

Au plus k instructions ajoutées choisies parmi :
 $x := y$; $y := x$; $x := x + y$;

```
bateau := x;
fin
```

Preuve par induction.

Observons l'exécution du programme, après l'exécution de i instructions ajoutées. Appelons x_i et y_i la valeur de x et y , respectivement, après i instructions

Nous prouverons que $\max(x_i, y_i) \leq 2^i \max(a, b)$ pour tout $i \geq 0$.

Base : Soit un programme bateau après aucune ($i = 0$) des instructions ajoutées. $\max(x_0, y_0) \leq \max(a, b) * 2^i$, car $x_0 = a$ et $y_0 = b$ et $i = 0$

Pas : Soit $i > 0$ et supposons qu'après $i-1$ instructions ajoutées $\max(x_{i-1}, y_{i-1}) \leq 2^{i-1} \max(a, b)$

Après i instructions ajoutées, $\max(x_i, y_i) \leq 2^i \max(a, b)$ car trois cas sont possibles :

L'instruction (i) est $y := x$. Ne change pas le maximum :

$$\begin{aligned}
x_i &= x_{i-1} \\
y_i &= x_{i-1} \\
\max(x_i, y_i) &= \max(x_{i-1}, x_{i-1}) \leq \max(x_{i-1}, y_{i-1}) \leq 2^{i-1} \max(a, b) \text{ par hy-} \\
&\text{pothèse d'induction} \\
\max(x_i, y_i) &\leq 2^i \max(a, b)
\end{aligned}$$

L'instruction (i) est $x := y$. Ne change pas le maximum

$$\begin{aligned}
x_i &= y_{i-1} \\
y_i &= y_{i-1} \\
\max(x_i, y_i) &= \max(y_{i-1}, y_{i-1}) \leq \max(x_{i-1}, y_{i-1}) \leq 2^{i-1} \max(a, b) \text{ par hy-} \\
&\text{pothèse d'induction} \\
\max(x_i, y_i) &\leq 2^i \max(a, b)
\end{aligned}$$

L'instruction (i) est $x := x + y$;

$$\begin{aligned}
x_i &= x_{i-1} + y_{i-1} \\
y_i &= y_{i-1} \\
\max(x_i, y_i) &= \max(x_{i-1} + y_{i-1}, y_{i-1}) \leq 2 \max(x_{i-1}, y_{i-1}) \\
\max(x_i, y_i) &\leq 2 \max(x_{i-1}, y_{i-1}) \leq 2(2^{i-1}) \max(a, b) \text{ par hypothèse d'induction} \\
\max(x_i, y_i) &\leq 2^i \max(a, b)
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve par induction que $\max(x_i, y_i) \leq 2^i \max(a, b)$ pour tout $i \geq 0$.

La valeur de retour après k instructions est x_k , or, $f(a, b) = x_k \leq \max(x_k, y_k) \leq 2^k \max(a, b)$. Ainsi $f(a, b) \leq 2^k \max(a, b)$

Preuve par induction généralisée

Soit \star une opération associative. Montrez que tout parenthésage d'un produit de n termes est équivalent.

– base :

$n=2$: Clair puisqu'il n'y a qu'un seul parenthésage

$n=3$: Clair puisque par hypothèse \star est associative.

– pas d'induction :

Soit $n > 3$. Supposons que quelque soit $1 < k \leq n$ tout parenthésage d'un produit de k termes soit équivalent à $c_1 \star (c_2 \star (c_3 \dots c_k) \dots)$ et montrons cette propriété à l'ordre $n + 1$.

Le produit de $n + 1$ termes se divise nécessairement en deux blocs ayant respectivement n_a et n_b termes (avec $n_a + n_b = n + 1$ et $n_a, n_b > 0$). Deux cas sont possibles :

– $n_a = 1$

Alors le produit se présente sous la forme $c_1 \star (B)$. Or B contient n termes et on peut donc y appliquer l'hypothèse d'induction. Ainsi B est équivalent à $c_2 \star (c_3 \star (c_4 \dots c_{n+1}) \dots)$. Et par conséquent le produit au complet est équivalent à $c_1 \star (c_2 \star (c_3 \star (c_4 \dots c_{n+1}) \dots))$.

– $1 < n_a \leq n$

Alors le produit se présente sous la forme $(A) \star (B)$. Puisque $n_a \leq n$, on peut appliquer l'hypothèse d'induction à A : A est donc équivalent à $c_1 \star (c_2 \star (\dots c_{n_a}) \dots)$. Le produit total est donc équivalent à $c_1 \star (c_2 \star (\dots c_{n_a}) \dots) \star (c_{n_a+1} \star \dots c_{n+1})$. Par associativité, ceci est équivalent à $c_1 \star ((c_2 \star \dots c_{n_a}) \dots) \star (c_{n_a+1} \star \dots c_{n+1})$. On a donc une expression qui correspond au premier cas.

Preuve par diagonalisation

Montrez que \mathbb{R} n'est pas énumérable, mais que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'est.

Il suffit de montrer que l'intervalle $[0, 1)$ n'est pas énumérable car tout sous-ensemble d'un ensemble énumérable l'est aussi.

On représentera un nombre en notation décimale en évitant la représentation périodique $\dots\bar{9}$ afin d'éliminer les ambiguïtés. Par exemple, $0.1324\bar{9}$ est représenté par 0.1325 . De cette façon, tout nombre admet une représentation décimale unique. Les nombres dans l'intervalle $[0, 1)$ sont précisément ceux qui ont une représentation de la forme $0.x_1x_2x_3\dots$

Supposons que l'intervalle $[0, 1)$ est énumérable. Il existe donc une suite x^1, x^2, x^3, \dots dans laquelle chaque nombre entre 0 et 1 se retrouve une fois.

On va maintenant construire (par diagonalisation) un nombre x_* dans l'intervalle qui ne peut être dans cette suite, ce qui par contradiction, montrera que $[0, 1)$ ne peut être énumérable.

Pour chaque $i \geq 1$, on a la représentation décimale $0.x_1^i x_2^i x_3^i \dots$ de x^i . Soit $x_* = 0.y_1 y_2 y_3 \dots$ où chaque y_i est défini en modifiant x_i^i par un nombre autre que 9 (pour éviter $\dots\bar{9}$). Donc, $y_i \neq x_i^i$ pour tout $i \geq 1$. Ce nombre x_* est bien dans l'intervalle $[0, 1)$. Pourtant, il ne peut pas être dans la suite puisqu'il diffère de chaque x^i par au moins une décimale, ce qui termine la preuve.

Montrer ensuite la bijection entre $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ et \mathbb{N} . La bijection montre bien que $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ est énumérable.