

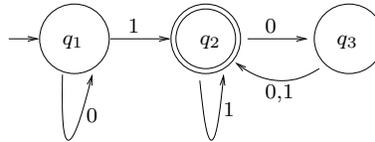
Démonstration 3 (Solutions)

IFT2102

27 janvier 2006

Preuve par induction sur un automate

Soit M_1 l'automate suivant :



Prouvez par induction que

- $[0^i, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2] \Rightarrow i$ pair
- i pair $\Rightarrow [0^i, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2]$

Première partie

Montrons que $([0^i, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2] \Rightarrow i$ pair). En d'autres mots, si on lit des zéros à partir de q_2 et on reste en q_2 , on en a nécessairement lut un nombre pair.

Puisque le prédicat concerne la nature de i , il est préférable de faire l'induction sur la longueur de dérivation, c'est-à-dire le nombre représenté par l'étoile. Puisqu'on doit lire le mot 0^i , ce nombre est égal à i et donc ça semble équivalent. Cependant, pour la clarté de l'explication, retenons que la longueur de dérivation est une donnée fixée sur laquelle on induit, et i est l'inconnue dont on veut connaître une propriété (paire ou non).

Induction : Le prédicat est l'énoncé complet $([0^i, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2] \Rightarrow i$ pair) et on induit sur $*$.

Base : $* = 0$. $[0^0, q_2] \vdash^0 [\varepsilon, q_2] \stackrel{?}{\Rightarrow} 0$ pair

Pour évaluer la vérité d'un prédicat $P \Rightarrow Q$, on pose que P est vrai et on se

demande si Q est vrai. Ici, on pose $[0^i, q_2] \vdash^0 [\varepsilon, q_2]$ et regarde ce que ça impose sur i . À partir de $[0^i, q_2]$, on ne lit rien et on arrive à $[\varepsilon, q_2]$, donc $0^i = \varepsilon$, et i vaut 0, un nombre pair. L'énoncé est vrai.

Faisons un autre cas de base, afin de préparer l'induction généralisée.

Base : $* = 1$. $[0^i, q_2] \vdash^? [\varepsilon, q_2] \Rightarrow i$ pair

Ici, l'implication est vraie puisque la prémisse est fausse (nier une implication correspond à trouver un cas où la prémisse est vraie et la conclusion est fausse). En effet, en lisant un seul 0 à partir de q_2 , on arrive à q_3 , donc la prémisse $([0^i, q_2] \vdash [\varepsilon, q_2])$ est toujours fausse.

Pas : Soit $* > 1$ et supposons que le prédicat est vrai pour $* - 2$. On suppose donc que $([0^k, q_2] \vdash^{*-2} [\varepsilon, q_2] \Rightarrow k$ pair) est vrai, k étant une variable locale qui prendra éventuellement la valeur qui nous conviendra.

On cherche à évaluer la valeur de vérité de l'énoncé $([0^i, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2] \Rightarrow i$ pair). Pour y arriver, on pose la prémisse vraie et on la traite en essayant d'arriver à la conclusion.

Posons donc que la prémisse $([0^i, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2])$ est vraie, c'est-à-dire qu'en lisant i zéros à partir de q_2 , on revient à q_2 . Transformons l'énoncé en essayant d'y faire apparaître l'hypothèse d'induction. Partons de l'état de dérivation $[0^i, q_2]$ et lisons deux zéros. Par inspection de l'automate, on arrive à l'état de dérivation $[0^{i-2}, q_2]$. On peut donc réécrire la prémisse $([0^i, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2])$ sous cette forme :

$$[0^i, q_2] \vdash^2 [0^{i-2}, q_2] \vdash^{*-2} [\varepsilon, q_2]$$

On a posé que cette simulation de l'automate était vraie, donc chacun de ses morceaux est vrai. On voit que la prémisse de l'hypothèse d'induction est apparue du côté droit. En instanciant la variable k de l'hypothèse, on la réécrit de la façon suivante :

$$[0^{i-2}, q_2] \vdash^{*-2} [\varepsilon, q_2] \Rightarrow i - 2 \text{ pair}$$

Mais $i - 2$ pair implique i pair (on peut le formaliser très facilement de la façon suivante : $i - 2$ pair $\Rightarrow i - 2 = 2a \Rightarrow i = 2a + 2 \Rightarrow i = 2(a + 1) \Rightarrow i$ pair).

En rassemblant le tout on arrive à la chose suivante :

$$[0^i, q_2] \vdash^2 [0^{i-2}, q_2] \vdash^{*-2} [\varepsilon, q_2] \Rightarrow i - 2 \text{ pair} \Rightarrow i \text{ pair}$$

Et en enlevant les morceaux qui nous intéressent moins,

$$[0^i, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2] \Rightarrow i \text{ pair},$$

ce qu'on cherchait à prouver.

Deuxième partie

Montrons que $(i \text{ pair} \Rightarrow [0^i, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2])$. En d'autres mots, si on lit un nombre pair de zéros à partir de q_2 , on arrive à q_2 .

Pour les i impairs, l'énoncé est trivialement vrai, et donc on peut faire l'induction sur j , avec $i = 2j$. On induit sur le predicat simplifié $[0^{2j}, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2]$.

Base : $j = 0$. $[0^0, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2]$ est vrai puisqu'en ne lisant rien ($0^0 = \varepsilon$), on reste en q_2 .

Pas : Soit $j > 0$ et supposons que $[0^{2(j-1)}, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2]$ est vrai.

On veut montrer que $[0^{2j}, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2]$.

En simulant l'automate à partir de q_2 sur la chaîne 00 , on arrive à q_2 , et donc on peut écrire $[0^{2j}, q_2] \stackrel{2}{\vdash} [0^{2j-2}, q_2]$.

On complète la dérivation en se servant de l'hypothèse d'induction :

$[0^{2j}, q_2] \stackrel{2}{\vdash} [0^{2(j-1)}, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2]$.

On a $[0^{2j}, q_2] \vdash^* [\varepsilon, q_2]$, ce qu'on voulait montrer.