

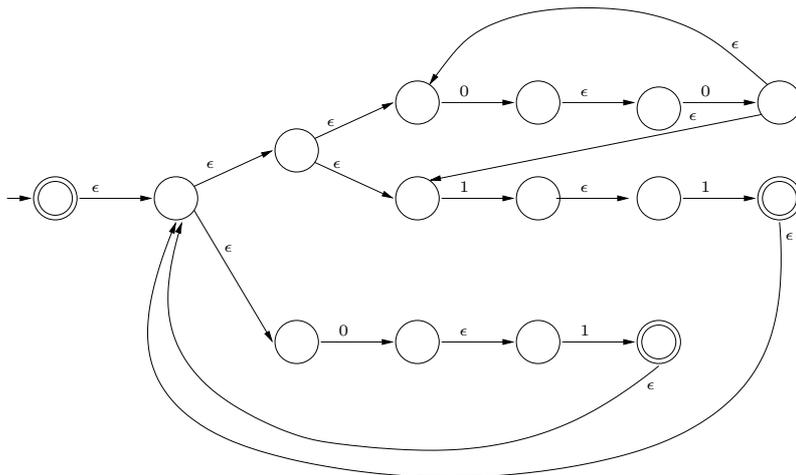
Démonstration 5 (solutions)

IFT2102

10 février 2006

1 Un AFN pour une ER

Donnez un automate fini non-déterministe qui reconnaît le langage décrit par l'expression régulière suivante : $((00)^*(11) + 01)^*$.



2 Le bonhomme Michelin à trois pneus

Utilisez le lemme du bonhomme Michelin à trois pneus afin de démontrer que le langage $L_2 = \{a^{2^n} \mid n \geq 0\}$ n'est pas régulier.

Supposons que L_2 est régulier. Soit P , le nombre donné par le lemme du bonhomme Michelin à trois pneus. Considérons $\omega = a^{2^P}$, il est clair que $\omega \in L_2$

et que $|\omega| \geq P$. Soit $\omega = xyz$ une décomposition respectant les deux premières conditions du lemme du bonhomme Michelin; i.e. $|y| \geq 1$ et $|xy| \leq P$. On peut alors poser $|x| = n \geq 0$, $|y| = m \geq 1$ et $n + m \leq P$. On conclut que $|z| = 2^P - m - n$. Le lemme affirme que les mots de la forme $xy^i z$ appartiennent au langage L_2 pour tous i . Voyons si $xyyz$ appartient à L_2 . Par construction, $xyyz = a^n a^m a^m a^{2^P - m - n}$, donc

$$|xyyz| = n + m + m + 2^P - m - n = 2^P + m.$$

On sait toutefois, par hypothèse, que $n + m \leq P$, donc $m \leq P < 2^P$. On conclut que :

$$2^P < 2^P + m < 2^{P+1},$$

ainsi $|xyyz|$ n'est pas une puissance de 2 et $xyyz$ n'appartient donc pas à L_2 .

→←

Conclusion : L_2 n'est pas régulier.

3 Encore Michelin

i Utilisez le lemme du bonhomme Michelin à trois pneus afin de démontrer que le langage $L_3 = \{0^n 1^n 2^m \mid n, m \geq 0\}$ n'est pas régulier.

Supposons que L_3 est régulier. Soit P , le nombre donné par le lemme du bonhomme Michelin à trois pneus. Considérons $\omega = 0^P 1^P 2^{2^P}$, il est clair que $\omega \in L_3$ et que $|\omega| \geq P$. Soit $\omega = xyz$ une décomposition respectant les deux premières conditions du lemme de bonhomme Michelin; i.e. $|y| \geq 1$ et $|xy| \leq P$. On note que xy ne peut contenir que des 0. Posons $x = 0^k$ et $y = 0^l$ où $k+l \leq P$. On conclut que $z = 0^{P-k-l} 1^P 2^{2^P}$. Le lemme affirme que les mots de la forme $xy^i z$ appartiennent au langage L_3 pour tous i entier positif. Voyons si $xyyz$ appartient à L_3 . Par construction, $xyyz = 0^k 0^l 0^l 0^{P-k-l} 1^P 2^{2^P}$, donc

$$|xyyz|_0 = k + l + l + P - k - l = P + l,$$

mais

$$|xyyz|_1 = P.$$

On conclut donc que $xyyz$ n'appartient pas à L_3 ce qui contredit le lemme du bonhomme Michelin à trois pneus pour les langages réguliers.

→←

Conclusion : L_3 n'est pas régulier.

ii Prouvez le même résultat en utilisant le fait que $\{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ n'est pas régulier.

Supposons que L_3 est régulier, alors $L_3 \cap L$ doit être régulier pour tout langage L régulier. Or si on pose $L = \{0^n 1^m \mid n, m \geq 0\}$ alors $L_3 \cap L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$ qui n'est pas un langage régulier.

→←

On conclut donc, encore une fois, que L_3 n'est pas un langage régulier.

4 Grammaire hors-contexte

Construisez des grammaires hors-contexte pour les langages suivants (seule l'ensemble des règles est donné ici) :

1. $\{a^n b^m \mid 0 \leq n < m\}$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow XbY \\ X &\rightarrow \varepsilon \mid aXb \\ Y &\rightarrow \varepsilon \mid bY \end{aligned}$$

2. $\{a^n b^m \mid 0 < n, 1 \leq m, m \neq n\}$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSb \mid T \mid U \\ T &\rightarrow aT \mid a \\ U &\rightarrow bU \mid b \end{aligned}$$

3. $\{a^i b^j a^k \mid j > 0, i = k\}$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aSa \mid T \\ T &\rightarrow bT \mid b \end{aligned}$$

4. $\{a^i b^j a^k \mid j = k, i > 2\}$

$$\begin{aligned} S &\rightarrow aaaTU \\ T &\rightarrow aT \mid \varepsilon \\ U &\rightarrow bUa \mid \varepsilon \end{aligned}$$

$$5. \{a^i b^j a^k b^l \mid i = l, j \neq k, i, j, k, l \geq 0\}$$

$$S \rightarrow T \mid aSb$$

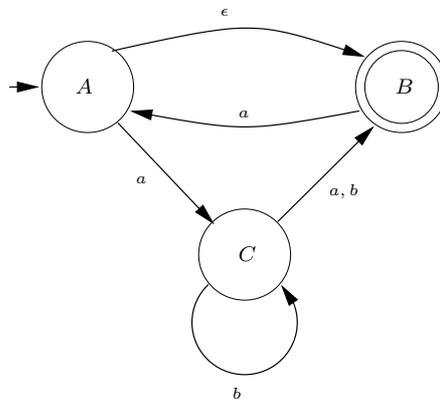
$$T \rightarrow bTa \mid U \mid V$$

$$U \rightarrow aU \mid a$$

$$V \rightarrow bV \mid b$$

5 Grammaire linéaire

Construisez une grammaire linéaire à droite pour le langage de l'AFN suivant :
La variable initiale est A .



$$A \rightarrow B \mid aC$$

$$B \rightarrow aA \mid \varepsilon$$

$$C \rightarrow aB \mid bB \mid bC$$