

Devoir 5
pour le 10 mars 2006

Dans les exercices suivants on suppose que les graphes sont connexes.

1. Dans les algorithmes de Prim et de Kruskal on trouve un arbre couvrant minimum. Comment trouver son poids dans les deux cas?
2. **Prouvez** vrai ou faux : les algorithmes de Kruskal et de Prim trouvent un arbre couvrant minimum même si les poids des arêtes peuvent être négatifs.
3. Soit $G = (V, E, w)$ un graphe pondéré par $w : E \rightarrow \mathbb{R}$. Soit $m = \min\{w(e) : e \in E\}$. Définissons $\hat{w} : E \rightarrow \mathbb{R}$ par $\hat{w}(e) = w(e) + |m|$. Soit $\hat{G} = (V, E, \hat{w})$.
 - (a) Prouvez que $\hat{w} : E \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$.
 - (b) On applique Kruskal ou Prim au graphe G avec \hat{w} . Est-ce que l'arbre couvrant minimum trouvé par ces algorithmes dans \hat{G} en est un dans G ? Expliquez!
 - (c) Si la réponse à la question 3b est OUI, quel est le poids de cet arbre? Si c'est NON, est-il possible quand même de le modifier pour trouver un arbre couvrant minimum de G et son poids?
 - (d) On applique Dijkstra à \hat{G} à partir d'un sommet u donné. Est-ce que l'algorithme trouve les chemins les plus courts de u vers les autres sommets? Si NON, pourquoi?
 - (e) Si la réponse à la question 3d est OUI, peut-on utiliser ces chemins et leur longueur pour trouver les plus courts chemins de u vers les autres sommets dans G ? Prouvez votre réponse.
 - (f) Trouver un algorithme plus rapide que celui de Dijkstra pour trouver les plus courts chemins et leur longueur à partir d'un sommet u donné dans un graphe non-pondéré.