

ANNEXE

(1) Soit R la récurrence homogène

$$\sum_{i=0}^k a_i t_{n-i} = 0$$

et soit $p(x)$ le polynôme caractéristique de R , avec les racines distinctes $r_1, \dots, r_\ell$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_\ell$. Alors la solution générale de R est

$$\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j r_i^n.$$

(2) Soit R^* la récurrence non homogène

$$\sum_{i=0}^k a_i t_{n-i} = \sum_{i=1}^s b_i^n q_i(n)$$

avec $b > 0$ et $q_i(n)$ un polynôme en n de degré d_i , $i = 1, \dots, s$. Soit $p^*(x)$ le polynôme caractéristique de R^* , avec les racines distinctes $r_1, \dots, r_\ell$ de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_\ell$,

$$p^*(x) = p(x) \prod_{i=1}^s (x - b_i)^{d_i+1}.$$

Alors la solution générale de R est

$$\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j r_i^n.$$

Remarque 1. En cours, nous avons vu la forme générale de la solution en (2) dans la forme

$$\sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{ij} n^j r_i^n + \sum_{i=\ell+1}^s \sum_{j=0}^{d_i} c_{ij} n^j b_i^n$$

où r_i , $i = 1, \dots, \ell$, sont des racines de $p(x)$ (et non pas de $p^*(x)$), avec le commentaire *la première partie vient des racines de $p(x)$, la deuxième des b_i* . Ceci n'est vrai que si les racines de $p(x)$ sont différentes de tous les b_i . Nous avons vu un exemple de "pourquoi" en cherchant la solution donnée en (3) plus bas (le cas $b^k = \ell$).

(3) Soit la récurrence

$$t(n) = \ell t\left(\frac{n}{b}\right) + cn^k$$

quand $\frac{n}{n_0}$ est une puissance de b , avec $b, k, n_0 \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$, $n_0 \geq 1$, $n > 0$, $c \in \mathbb{R}^{>0}$. Alors

$$t(n) \in \begin{cases} \Theta(n^k) & \text{quand } b^k > \ell \\ \Theta(n^{\log_b \ell}) & \text{quand } b^k < \ell \\ \Theta(n^k \log n) & \text{quand } b^k = \ell \end{cases}$$

et les relations semblables sont vraies pour

$$t(n) = \ell t\left(\frac{n}{b}\right) + f(n),$$

$f(n) \in \Theta(n)$ et, *mutatis mutandis*, $f(n) \in O(n)$, $f(n) \in \Omega(n)$.

Remarque 2. Quand on change la variable ou le codomaine, les conditions originales ne disparaissent pas mais sont traduites dans le nouveau paradigme.