

Voici un théorème qui permet de prouver que les algorithmes de Kruskal et de Prim (pour trouver un arbre couvrant minimum d'un graphe connexe pondéré) font ce qu'ils doivent faire.

Théorème 0.1 Soit $G = (V, E)$ un graphe pondéré par $c : E \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0}$. Soit $T = (V, F)$ un arbre couvrant minimum de G , $F' \subset F$ et soit $C_0 \dot{\cup} C_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} C_{k-1}$ une partition de l'ensemble des composantes connexes de $G_{F'} = (V, F')$. Soit $uv \in E \setminus F'$ une arête de coût minimum parmi celles qui relient les classes C_i différentes. Alors il existe un ACM $T^* = (V, F^*)$ tel que $F' \cup \{uv\} \subseteq F^*$.

Démonstration. Soit $G, T, V, E, F, F', S_0, \dots, S_{k-1}, uv$ comme dans l'énoncé. On va montrer comment obtenir l'arbre T^* à partir de T et uv .

1. Puisque T est connexe, il existe un chemin C dans T de u à v . Si uv est sur C , on a fini: il suffit de prendre $T^* = T$. Supposons alors que $uv \notin F$.
2. Soit $f \in E \setminus F'$ une arête reliant deux classes différentes de composantes connexes de $G_{F'}$. Alors par le choix de uv comme une arête de coût minimum, on a

$$c(uv) \leq c(f).$$

3. Soit $f \in C$ (donc dans T) une arête reliant deux classes différentes de composantes connexes de $G_{F'}$. Alors - par la minimalité de T - on a

$$c(f) \leq c(uv).$$

Pour le voir, on se rappelle que l'ajout d'une arête à un arbre crée un cycle dans le graphe ainsi obtenu et donc le graphe $T' = (V, F'')$ avec $F'' = (F \cup \{uv\}) \setminus \{f\}$ est un arbre couvrant de G et

$$c(f) + \sum_{f \neq e \in F} c(e) = c(T) \leq c(T') \leq c(uv) + \sum_{f \neq e \in F} c(e)$$

ce qui donne ce qu'on voulait.

4. Donc: pour toute arête f qui est dans T et qui relie deux classes différentes de composantes connexes de $G_{F'}$ on a

$$c(uv) = c(f).$$

5. On peut alors prendre $T^* = (V, F^*)$ où

$$F^* = (F \setminus \{f\}) \cup \{uv\}$$

pour n'importe quelle arête f décrite en 4. Ceci donnera

$$\sum_{e \in F} c(e) = c(T) = c(T^*) = \sum_{e \in F^*} c(e)$$

6. Pour terminer il suffit de noter que si $uv \notin C$ alors une telle arête f existe.

□